Clásicos de *Mutaciones matemáticas*

Explorando rincones interesantes, divertidos y extraños de las matemáticas

Erik Seligman

Utiliza las matemáticas de formas únicas para analizar las cosas que observas en la vida y utiliza pruebas para alcanzar lo inesperado. Aquí hay una gran diversidad de temas, por lo que todas las edades y niveles de habilidad disfrutarán de los debates. Verás cómo el punto de vista único del autor da un giro matemático a todo, desde los políticos hasta los hipopótamos. A lo largo del camino, disfrutarás de un punto de vista diferente y, con suerte, te abrirá a una forma de pensar un poco más innovadora.

¿Sabías que a veces 2 + 2 es igual a 5? ¿Que las ruedas no siempre tienen que ser redondas? ¿Que se puede demostrar matemáticamente que hay un hipopótamo en tu sótano? ¿O cómo detectar seres de cuatro dimensiones cuando pasan por tu cocina? Si no es así, ¡tienes que leer este libro! Clásicos de 'Mutación matemática' es una recopilación de los artículos del blog de Erik Seligman en MathMutation.com. Erik lleva muchos años creando podcasts y convirtiéndolos en su blog. Ahora ha recopilado los que considera más interesantes, los ha editado y organizado en un libro que a menudo invita a la reflexión, supone un reto y es divertido.

Lo que aprenderás:

Ver el mundo y los problemas de diferentes maneras a través de las matemáticas.

Aplicar las matemáticas a cosas que creías inimaginables.

Cosas abstractas que no se enseñan en la escuela.

A quién va dirigido este libro:

Adolescentes, estudiantes universitarios y adultos que puedan beneficiarse de las diferentes formas de ver los problemas y alimentar su interés por las matemáticas.

Clásicos de *Mutaciones matemáticas*

Explorando rincones interesantes,
divertidos y extraños de las matemáticas

Erik Seligman

Copyright © 2016 by Erik Seligman
Versión en español
Sargont (2025)

C O N T E N I D O

- Sobre el Autor
- Sobre el revisor técnico
- Agradecimientos
- Jugando con las matemáticas

CAPÍTULO 1

- Sorpresas sencillas
  - Ciudad de mutantes
  - Dos más dos son cinco
  - Trucos estúpidos con números
  - Dígitos engañosos
  - Aleatoriedad no aleatoria
  - Una verdadera celebración navideña
  - Conocimiento olvidado
  - Exponentes al cuadrado
  - Dándote los dedos

CAPÍTULO 2

- Hacia lo infinito
  - Demasiado infinito para mí
  - Infinitamente adelantado a su tiempo
  - Infinitos infinitos
  - Infinito por infinito
  - Perímetro infinito, área finita
  - Una biblioteca bastante grande

Alguien tumbó mi 8
Casi infinito
Números gigantes al revés
CAPÍTULO 3
Explorando la geometría
Algo que Euclides pasó por alto
Cómo no decorar tu baño
Abejas contra matemáticos
Un roce con el mal
Más retorcido de lo que creías
Aplasta esos dados
Dados locos
Ruedas que no son redondas
El futuro que nunca llegó
CAPÍTULO 4
Dimensiones más profundas
Haciendo real a Planilandia
¿Está condenado Planilandia?
Visitantes de la próxima dimensión
¿Puede presentarse la verdadera cuarta dimensión?
Una casa en cuatro dimensiones
Dar la vuelta en el tiempo
Monstruos espagueti de 11 dimensiones
Tu cocina en cinco dimensiones
A medida que pasa la matemática
Entre las dimensiones

CAPÍTULO 5

Comprendiendo el universo

¿El “Bang” falso?

La forma del universo

Tu tamaño en el espacio y en el tiempo

Observando el Universo

Álgebra alienígena

Mundos con el tiempo invertido

Un planeta en forma de pera

¿Dónde estoy?

Poniendo a trabajar al multiverso

CAPÍTULO 6

La mente matemática

¿De qué color es este pódcast?

Computadoras en el cerebro

El secreto de Rain Man

Míralo a los ojos

Los savants también son personas

El cerebro desinhibido

Un lenguaje lógico

Cuando el “ser” no es

Des-abstraer tu vida

Tus hijos son más inteligentes que tú

Me duele el cerebro

Psicrocronometría

CAPÍTULO 7

Ciencia y escepticismo
Por qué los estadísticos apestan en estadística
En promedio, las cosas son promedio
No entres en pánico
Tiene que ser cierto, hay una ecuación
Una vuelta retorcida sobre Turing
Quiero mi molécula
La proporción crédula
Jugando con la probabilidad
Resolver los problemas de Birmania
Una nueva numerología
Un gusano intestinal por niño
CAPÍTULO 8
Analizando las artes
Descubriendo la tercera dimensión
Una nueva perspectiva sobre la perspectiva
La venganza de Hipaso
Inaudible pero divertido
Cómo suena un planeta
Mozart tira los dados
El cálculo de Cándido
Fractales en el sombrero
¿Matemática o no matemática?
Gnovelas retorcidas
CAPÍTULO 9
Reflexiones políticas

Un teorema fundacional
Más que un gato de caricatura
El camino circular hacia la condena
Un profesor de matemáticas para recordar
Soluciones electorales
La democracia no funciona
Suelta ese número o disparamos
Así lo hacemos en el gobierno
CAPÍTULO 10
Cuestiones de dinero
La locura de las muescas
Cómo arruinar a tu jefe y hacerte rico
¿De qué color es tu cisne?
Desventaja comparativa
Dinero para las matemáticas
Gustar de la lotería
Tonterías numéricas
¿Siempre gana la casa?
Ascendiendo Mutadamente por la Escalera Corporativa
El Converso de un CEO
CAPÍTULO 11
Mirando la vida
Florence Nightingale, friki de las matemáticas
El genio que hizo trampa
Trasero de lanzadera
Auge y caída

Los boids y las abejas líderes
Una nueva clase de década
Bichos básicos
Matemáticas que pican
Viajes por el espacio animal
Un montón de gaviotas
CAPÍTULO 12
Paradojas desconcertantes
Puedes cruzar la calle
Naves griegas en cuatro dimensiones
Una sorpresa navideña
Resolviendo la paradoja del abuelo
Una decisión de un millón de dólares
La paradoja del pintor
La paradoja de Monty Hall
Una bomba nuclear matemática
CAPÍTULO 13
Repensando la realidad
Respondiendo a todas las preguntas posibles
Sacrificando una cabra al cálculo
Grue y Bleen
Hipopótamos en mi sótano
¿Hay un hipopótamo en este pódcast?
Te he mentido
¿Existe este pódcast?
Un universo hecho de matemáticas

Inmortalidad matemática

APÉNDICE

Referencias y lecturas adicionales

Sobre el Autor

Erik Seligman es Arquitecto de Verificación Formal en Intel Corporation, donde lleva más de dos décadas trabajando como ingeniero. Desde 2007 conduce el pódcast Mutación matemática. Fue autor principal del libro técnico Formal Verification: An Essential Toolkit for Modern VLSI Design (Morgan Kaufmann, 2015), muy bien recibido por la crítica. Obtuvo una maestría en informática en Carnegie Mellon y una licenciatura en matemáticas en Princeton. Desde 2013 se desempeña además como director electo en la Junta del Distrito Escolar de Hillsboro, el cuarto mayor distrito escolar K-12 en Oregón.

Sobre el revisor técnico

Barnaby Sheppard es escritor y editor de matemáticas, radicado en Londres, Reino Unido. Fue profesor e investigador en matemáticas puras (University College Dublin, Durham University, Lancaster University) y continúa dedicado a la disciplina, aunque expandiéndose ahora desde sus raíces en el análisis funcional y las álgebras de operadores hacia otros campos. Es autor de The Logic of Infinity (Cambridge University Press), una introducción a la teoría axiomática de conjuntos y asuntos matemático-filosóficos relacionados, y trabaja actualmente en varios proyectos de escritura a largo plazo. También se interesa en ciertos aspectos teóricos de la música y es un guitarrista entusiasta.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi esposa Ann y a mi hija Sonia, cuya paciencia y apoyo hicieron posible este libro.

También agradezco a mis amigos y colegas que revisaron borradores iniciales y enviaron comentarios y sugerencias: Timothy Y. Chow, Joe Leslie-Hurd, Winston Ou y Bhavinkumar Patel. ¡Gracias a todos!

Jugando con las matemáticas

Mi tía abuela Evelyn adoraba contar una anécdota de cuando me cuidaba a mí y a mis dos hermanas pequeñas, cuando yo tenía apenas cinco años. Después de perseguir a mi hermana por la sala unos minutos, se dio cuenta de que me había perdido de vista y empezó a buscarme por la casa, llamándome por mi nombre. Finalmente me oyó responder desde uno de los dormitorios:

—¡Estoy aquí, jugando!

Preocupada por lo que podría estar haciendo un niño de cinco años en un cuarto, gritó mientras corría por el pasillo:

—¿Jugando con qué?

—¡Con mis matemáticas! —respondí.

Se tranquilizó al llegar y encontrarme sentado tranquilamente en el suelo, garabateando números en un bloc de notas.

La mayoría de quienes escuchan esta historia se ríen: la idea de "jugar" con las matemáticas les parece absurda. Pero ¿por qué? Creo que es una triste falla de nuestros sistemas educativos modernos que tantos de mis conciudadanos vean a las matemáticas como una carga: algo que hay que soportar en la escuela, necesario para ciertos trabajos o, en el mejor de los casos, una herramienta útil para la ingeniería y la tecnología.

Cuando yo escucho la palabra "matemáticas", pienso en cosas como:

- Extrañas intuiciones que surgen del conteo básico: ¿sabías que casi todo el mundo en Pittsburgh tiene más dedos que el promedio?
- Cantidades desconcertantes como π o el infinito, que parecen tener menos sentido cuanto más las piensas: ¿puede un infinito ser más grande que otro?
- Misteriosos viajes a espacios extradimensionales: ¿vivimos en un mundo de tres, cuatro, once o infinitas dimensiones?
- Paradojas mentales que surgen de intentar razonar con precisión: ¿puedes refutar la prueba de un filósofo de que ahora

mismo hay un hipopótamo en tu sótano?

- Una mirada al funcionamiento de nuestra propia mente: ¿podemos explicar por qué el tiempo pasa más rápido a medida que envejecemos?
- La naturaleza fundamental de la realidad: ¿somos en verdad una simulación informática?

Cuando uno conecta las matemáticas con temas como estos, de repente se vuelven algo mucho más lúdico y motivador que las técnicas rutinarias machacadas en la escuela. Estas ideas son las que me motivaron, hace casi una década, a crear el pódcast Mutación matemática. Aunque había miles de pódcast (y ahora hay aún más), descubrí que no existía ninguno que ocupara este nicho: breves y concisas introducciones a rincones divertidos, interesantes y extraños de las matemáticas que probablemente nunca escuchaste en la escuela.

Existen algunos otros pódcast de matemáticas, pero su enfoque principal suele ser la ayuda con tareas para estudiantes actuales. Es un objetivo loable, pero se pierde mucho más allá de eso. Mis principios rectores al elegir temas para Mutación matemática siempre han sido:

Accesibilidad. Un oyente promedio, sin más formación matemática que la secundaria —o incluso un estudiante de secundaria— debería poder comprender y disfrutar el pódcast.

Brevedad. La idea es ofrecer una pequeña muestra que abra el apetito, compartir un único concepto matemático intrigante o sorprendente y comunicar la idea básica. Para detalles más elaborados o pruebas rigurosas que satisfagan a un profesor de matemáticas, los oyentes pueden consultar las referencias adicionales en las notas.

Bienvenida. Un defecto que veo en muchos libros y pódcast del género “matemáticas interesantes” es que se centran en proponer problemas para resolver. Resolver problemas es esencial para crecer en matemáticas, pero puede intimidar a quienes tienen menos experiencia o confianza. Por eso, yo evito intencionalmente ese camino, prefiriendo la exposición directa a los desafíos de resolución.

¡Diversión! El tema tiene que resultarme inusual, fascinante o sorprendente, y no ser algo que típicamente se aprende en la secundaria o en cursos universitarios básicos.

Debo mencionar también que, al crear este pódcast, me he apoyado en "los hombros de gigantes". Crecí leyendo los libros y ensayos alucinantes de autores brillantes como Martin Gardner, Douglas Hofstadter, Rudy Rucker e Isaac Asimov. Muchos de los temas nacieron inspirados en sus escritos. En general, no pretendo haber obtenido resultados matemáticos nuevos, sino haber seleccionado cuidadosamente un conjunto de curiosidades matemáticas especialmente intrigantes y haberles dado una exposición breve y clara, diseñada para abrir el apetito de aprender más. Espero que este libro sea un punto de partida que conduzca a muchas horas adicionales de disfrute mientras profundizas en tus temas favoritos a través del capítulo de "Referencias y lecturas adicionales".

Al compilar los episodios del pódcast para transformarlos en este formato impreso, intenté agruparlos en capítulos lógicos y he hecho lo posible por revisarlos y mejorarlos. Creo que tú, lector, mereces un pequeño contenido adicional por comprar este libro, en lugar de limitarte a escuchar los episodios gratuitos en línea. Espero que, tras leerlo, también pienses en las matemáticas no sólo como una asignatura obligatoria en la escuela, una carga necesaria o una herramienta útil para la ingeniería, sino como algo con lo que se puede jugar y divertirse.

CAPÍTULO 1

Sorpresas sencillas

Muchos de los divertidos detalles matemáticos que he destacado en el pódcast no requieren un razonamiento muy profundo o complejo: son consecuencias simples de pensar lógicamente nuestras nociones básicas de números, conteo o probabilidad. En este primer capítulo hablaremos de algunas de estas ideas muy elementales pero sorprendentemente curiosas.

Ciudad de mutantes

Del pódcast Mutación matemática 1

¿Sabías que casi todo el mundo en Pittsburgh tiene más dedos que el promedio? Algunos dicen que es por residuos nucleares. Otros, que por contaminación tóxica. Yo digo que es matemática pura.

Supongamos que una ciudad tiene dos millones de habitantes. Si todos estuvieran sanos, esperaríamos un total de veinte millones de dedos entre ellos. Así que el promedio sería veinte millones dividido entre dos millones, es decir, 10. Pero, en la vida real, ¿existe alguna ciudad donde absolutamente todos estén sanos?

En cualquier población, siempre habrá un pequeño número de personas que hayan perdido un dedo por un accidente industrial o por teclear demasiado fuerte jugando World of Warcraft. Supongamos que en esa ciudad diez personas han perdido un dedo. Entonces el número total de dedos no es veinte millones, sino 19.999.990. (Puede haber unos pocos con dedos extra que compensen esto, pero es una condición mucho más rara, probablemente insignificante para este cálculo). Esto reduce el promedio a 9,999995 por persona. ¡Y, sin embargo, casi todos siguen teniendo diez dedos, lo que supera al promedio por 0,000005! Así que, en efecto, casi todos tienen más dedos que el promedio.

Como ya habrás notado, estamos jugando con la diferencia entre nuestra noción cotidiana de “promedio” y su definición matemática. El

promedio suele definirse formalmente como la media: la suma de una medida dividida por el tamaño de la población, que fue lo que calculamos antes. Pero en la conversación común solemos pensar en "promedio" como el miembro típico de la población. En términos más formales, esto se parece más a la mediana, donde ordenas a la población según una medida y tomas al miembro central como representativo. Y, en efecto, el habitante mediano de Pittsburgh tiene los cinco dedos en cada mano que cabría esperar.

En cualquier caso, la afirmación con la que abrí este episodio se cumple en prácticamente cualquier ciudad. Habiendo vivido allí durante cuatro años en la década de 1990, creo que Pittsburgh puede ser una ciudad mutante en cierto sentido único, pero si lo es, es por razones más allá de esta discusión. Así que, si tu próxima reunión social se pone aburrida, anímala señalando que, según el promedio de dedos, tu ciudad también es una ciudad de mutantes.

Dos más dos son cinco

Del pódcast Mutación matemática 210

Hace poco escuché a alguien citar una metáfora ingeniosa en una conversación casual:

"La vida es cuando la naturaleza toma 2 y 2 y los convierte en 5."

Es una forma bonita de expresar cómo los seres vivos son más que la suma de sus partes. Si tomaras todos los compuestos químicos de mi cuerpo y los arrojaras al suelo en las proporciones correctas, lo único que obtendrías sería un desastre. Sin embargo, aquí estoy yo, con la suficiente consciencia para grabar pódcast de matemáticas.

Busqué en Internet el origen de esta frase y me sorprendió la cantidad de referencias a esta ecuación aparentemente absurda: 2 + 2 = 5.

La mayoría seguramente recordará la ecuación del clásico de George Orwell, 1984. Como se explica en el libro, si el gobierno dice que 2 + 2 = 5, es deber de los ciudadanos no solo repetirlo, sino realmente creer que es cierto. Lo sorprendente es que Orwell no inventó esto de la nada: un gobierno totalitario real, la Unión Soviética, utilizó de hecho 2 + 2 = 5 en su propaganda. Apareció en un cartel titulado:

"2 + 2 = 5: Aritmética de un contra-plan más el entusiasmo de los trabajadores."

La idea era que un plan quinquenal podía completarse en 4 años gracias al entusiasmo adicional de los trabajadores. Claro que, en realidad, mucho de ese "entusiasmo" provenía del miedo a ser enviados a los campos de prisioneros del Gulag, lo que llevaba a muchos directivos a falsificar estadísticas para mostrar en el papel lo que el gobierno quería ver. También se dice que el nazi Hermann Goering usó esta metáfora en la vida real, al declarar: "Si el Führer lo quiere, dos y dos son cinco."

La frase, sin embargo, ya existía en las artes desde principios del siglo XIX. Según la Wikipedia, apareció primero en una carta de Lord Byron:

"Sé que dos y dos son cuatro —y me alegraría poder demostrarlo

también si pudiera—, aunque debo decir que si de algún modo pudiera convertir 2 y 2 en cinco, me daría mucho más placer."

Probablemente hacía una referencia indirecta a las Meditaciones de René Descartes, donde el filósofo se pregunta si ecuaciones como 2 + 3 = 5 existen fuera de la mente humana y si pueden ser puestas en duda:

"Y además, como a veces pienso que otros se equivocan en asuntos que creen conocer perfectamente, ¿cómo sé que no me engaño yo también cada vez que sumo dos y tres, o cuento los lados de un cuadrado, o emito algún juicio aún más simple, si es que algo más simple puede imaginarse?"

Más tarde, Victor Hugo empleó este concepto como crítica al poder de las masas que había llevado al ascenso de Napoleón, anticipando la metáfora política de Orwell:

"Ahora bien, consigue siete millones quinientos mil votos para declarar que dos y dos son cinco, que la línea recta es el camino más largo, que el todo es menor que la parte; consíguelo con ocho millones, con diez millones, con cien millones de votos, y no habrás avanzado ni un paso."

Autores rusos como Turguénev, Tolstói y Dostoievski también usaron la metáfora. Turguénev, por ejemplo, la vinculó con la intervención divina:

"Lo que sea que un hombre pida en oración, pide un milagro. Toda oración se reduce a esto: Gran Dios, concede que dos veces dos no sean cuatro."

En el siglo XX, tras Orwell, otros escritores como Camus o Ayn Rand recurrieron a la misma metáfora en su crítica al totalitarismo.

Ahora bien, ¿hay algún sentido en el que realmente pueda decirse que 2 + 2 = 5? Un chiste habitual entre matemáticos es: "2 + 2 = 5, para valores particularmente grandes de 2."

Esto alude a problemas de redondeo: por ejemplo, si partimos de la ecuación correcta 2.4 + 2.4 = 4.8 y redondeamos cada número al entero más cercano, llegamos efectivamente a 2 + 2 = 5. Otra posibilidad es jugar con las definiciones: si en vez de "2" usamos un símbolo que represente 2.5, la suma da 5.

Circulan también por Internet "demostraciones" de que 2 + 2 = 5, con largas cadenas de álgebra. Normalmente esconden un paso

inválido, como sustituir un término t por $\sqrt{(t^2)}$ (que en realidad debería ser |t|, es decir, el valor absoluto), o dividir ambos lados por 0. He aquí un ejemplo sencillo:

$4 - 4 = 10 - 10$ (empieza con una igualdad verdadera)

$(2 - 2)\times(2 + 2) = 2 \times 5 - 2 \times 5$ (reescribe en forma más compleja)

$(2 - 2)\times(2 + 2) = (2 - 2) \times 5$ (reagrupa factores)

$\Rightarrow 2 + 2 = 5$ (divide ambos lados por $(2 - 2)$)

El último paso, claro, divide entre 0: no tiene validez matemática.

Un artículo satírico en línea [Eul04] señaló algunos casos de la vida real donde “2 y 2” pueden acabar dando “5”. Por ejemplo, los incas usaban cuerdas anudadas para llevar cuentas: si atas dos cuerdas con dos nudos cada una, la cuerda resultante tendrá 5 nudos, contando el del amarre. Otro caso: si metes 2 conejos machos y 2 hembras en una jaula… pronto tendrás mucho más que 5.

Y esto nos devuelve a la cita que abrió todo el asunto. Irónicamente, mi búsqueda en la web no logró descubrir su verdadero origen. Tal vez recordé mal las palabras exactas, o quizá alguien la improvisó en el momento y no viene de una cita famosa. Si sabes de dónde salió, ¡escríbeme un correo!

Trucos estúpidos con números

Del pódcast Mutación matemática 23

En los carnavales de los siglos XIX y XX era común ver un espectáculo anunciado como ¡el prodigio del cálculo!: alguien capaz de realizar hazañas increíbles, como multiplicar números enormes o calcular raíces 23ª al instante, delante del público. Algunos eran genios auténticos, incluso savants autistas.

Pero hoy vamos a hablar de los farsantes: personas que no eran genios, pero lograban impresionar a las multitudes con sus supuestas habilidades. Martin Gardner describió muchos de sus trucos en su célebre serie Juegos matemáticos de Scientific American.

Algunos métodos eran simple y llanamente trampas. La más fácil: tener un cómplice en la audiencia, a quien señalar para que "al azar" diera los números. Así podían tener el problema preparado de antemano y responder de inmediato. Otra forma de engañar era ganar tiempo. Si alguien proponía multiplicar dos números grandes, el artista pedía que los repitiera para asegurarse de haberlos escuchado bien, luego los copiaba lentamente en la pizarra… y recién entonces el asistente daba la señal de "¡ya!", iniciando el cronómetro. Para entonces, el "calculador prodigio" ya llevaba varios minutos de ventaja en su cuenta mental.

Más interesantes son los trucos sin trampas, basados en memoria y entrenamiento, que permiten hacer cálculos complejos de verdad. Por ejemplo, uno puede duplicar su velocidad de multiplicación memorizando todas las tablas de multiplicar hasta 99 × 99. En la multiplicación larga, al tratar cada columna se usa la tabla de 9 × 9 aprendida de niño. Si memorizas hasta la de 99, puedes resolver dos columnas de una sola vez.

Otro truco válido es especializarse en un tipo concreto de problemas y memorizar datos auxiliares. Por ejemplo: anunciar que puedes calcular en menos de un minuto la raíz 23ª de cualquier número de hasta 44 cifras. Suena asombroso… pero 99 elevado a 23 ya tiene más cifras que eso. Si memorizas todas las potencias 23ª de los enteros del 1

al 99, solo tienes que buscar mentalmente el valor más cercano y listo.

Hoy, quizá estos números rápidos aún sean un rompehielos en fiestas, pero como espectáculo ya no impresionan tanto: cualquier teléfono lleva calculadora y conexión inalámbrica, lo que hace demasiado fácil el engaño. Aun así, sigue siendo divertido pensar en estos trucos que permiten a un no-genio parecer un virtuoso del cálculo.

Dígitos engañosos

Del pódcast Mutación matemática 206

Imagina que eres un directivo corrupto de una gran firma financiera. Para ocultar que perdiste todo el dinero invirtiendo en pódcast de matemáticas hace más de diez años, inventas balances mensuales falsos. Cuidadosamente escoges cifras donde los dígitos iniciales del 1 al 9 aparezcan, cada uno, aproximadamente el 11% de las veces, de modo que todo parezca aleatorio, como en cuentas reales.

Pero de pronto la policía irrumpe y te arresta. Te dicen que la distribución de esos dígitos es la prueba clave. En realidad, un extraño pero preciso resultado matemático, conocido como la Ley de Benford, indica que el primer dígito debería ser 1 alrededor del 30% de las veces, con la probabilidad decreciendo hasta que el 9 solo aparezca un 5% de las veces.

¿Cómo es posible? ¿Acaso los procesos aleatorios de la realidad favorecen algunos dígitos sobre otros?

Esta sorprendente ley matemática fue descubierta por primera vez por el astrónomo estadounidense Simon Newcomb en 1881, en una era previa a la automatización en la que realizar cálculos avanzados con eficiencia exigía un pequeño libro con tablas de logaritmos. Newcomb observó que, en su libro de logaritmos, las primeras páginas —las que cubrían números que empezaban por 1— estaban mucho más desgastadas que las páginas posteriores. En 1938, el físico Frank Benford investigó el fenómeno con más detenimiento, y por eso la ley lleva hoy su nombre. Benford estudió miles de conjuntos de datos tan dispares como superficies de ríos, una gran colección de pesos moleculares, 10^4 constantes físicas y todos los números que pudo reunir en un ejemplar de Reader's Digest. Los resultados le parecieron sorprendentemente consistentes: el dígito 1 aparece como cifra inicial en torno al 30% de las veces, seguido del 2 en alrededor del 18%, y descendiendo gradualmente hasta aproximadamente un 5% para los dígitos 8 y 9.

Aunque a primera vista resulta contraintuivo, la Ley de Benford

tiene mucho sentido si miras un trozo de papel cuadriculado semilogarítmico. Probablemente viste este tipo de papel en las clases de física del instituto: hay un gran intervalo entre 1 y 2, con intervalos que se reducen conforme llegas hasta 9, y luego el intervalo vuelve a crecer para representar el comienzo del siguiente orden de magnitud. Si lanzas un dardo sobre esa escala, es mucho más probable que golpees uno de los intervalos 1–2 que cualquiera de los demás; las probabilidades disminuyen para los dígitos más altos dentro de cada orden de magnitud.

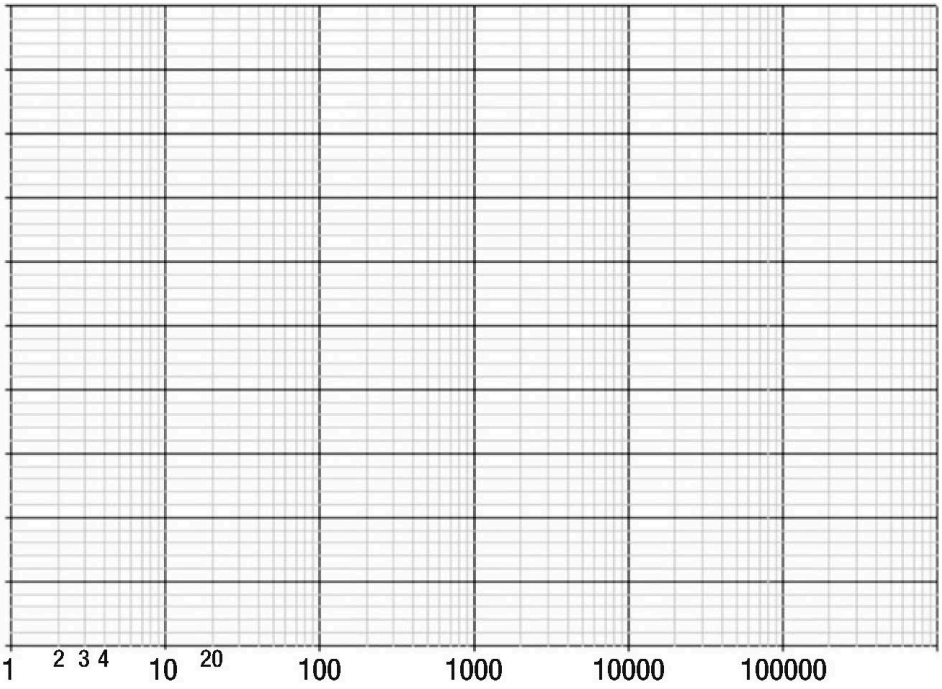


Figura 1-1. Papel semilogarítmico

La idea es que esta escala puede representar valores muy pequeños y muy grandes en el mismo gráfico, reservando la misma cantidad de espacio a intervalos mucho mayores a medida que crece el orden de magnitud. Efectivamente, transforma intervalos exponenciales en intervalos lineales. Si un conjunto de datos tiende a distribuirse de manera bastante uniforme a través de órdenes de magnitud, es probable que sus números aparezcan en ubicaciones aleatorias sobre esta escala logarítmica —lo que equivale a decir que las probabilidades de caer en un intervalo 1–2 son mucho mayores que en 2–3, 3–4, y así

sucesivamente.

Ahora bien: lo lógico es preguntarse por qué un conjunto de datos variaría de manera suave a lo largo de varios órdenes de magnitud. En realidad, hay explicaciones naturales. Una es simplemente que se trate de una colección heterogénea de números tomados de distintas fuentes —como en el ejemplo de Reader's Digest o el conjunto de constantes físicas—. Otra explicación sencilla es el crecimiento exponencial. Mira, por ejemplo, las potencias de 2: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, etc. Verás que, por cada número de cifras, recorres solo unas pocas cifras antes de pasar a tener una cifra más —al alcanzar el siguiente orden de magnitud—. Al doblar valores, saltas a menudo a números que comienzan con 1. Si escribes las primeras 20 potencias de 2 y miras sus cifras iniciales, comprobarás que ya no estamos tan lejos de la distribución que predice Benford: las cifras iniciales 1 aparecen con más frecuencia.

Conjuntos de datos humanos o naturales que abarcan múltiples órdenes de magnitud tienden asimismo a seguir la distribución de Benford. La clave es que el conjunto debe englobar tanto ejemplos muy pequeños como muy grandes. Si miras una lista de poblaciones de pueblos en Inglaterra, desde la choza más minúscula hasta Londres, verás que obedece la Ley de Benford. En cambio, si restrictamente defines "pueblo pequeño" como aquel con entre 1.000 y 9.999 habitantes —es decir, acotas el estudio a números de cuatro cifras—, el fenómeno desaparece y las cifras iniciales mostrarán una distribución aproximadamente uniforme.

La parte más intrigante de la Ley de Benford es que conduce a aplicaciones prácticas de gran potencia. Como comentábamos antes, la Ley de Benford es admisible en tribunales como herramienta para detectar fraudes contables, y con frecuencia sirve para atrapar a estafadores que no tuvieron la previsión de escuchar Mutación matemática. (O que la han escuchado demasiado despacio y aún no han llegado a este episodio.) En las notas del programa hay un enlace a un artículo que demuestra fraudes en varios municipios estadounidenses en quiebra basándose en que sus datos reportados no se ajustaban a Benford. Se ha afirmado, también, que esta ley prueba fraude en los datos de las elecciones iraníes de 2009, y en los datos económicos que

Grecia presentó para entrar en la Eurozona. Incluso se ha propuesto como test para detectar fraude científico en artículos publicados. Naturalmente, una vez que alguien conoce la Ley de Benford, puede fabricar datos falsos que la respeten; así que la conformidad con la ley no prueba la ausencia de fraude, pero su infracción sí puede resultar muy sospechosa.

Así que la próxima vez que revises un gran conjunto de datos en una tabla contable, en un artículo científico o en una noticia periodística, fíjate bien en las primeras cifras de todos los números. Si no aparecen en las proporciones que identifica Benford, quizá estés ante un conjunto generado ad hoc.

Aleatoriedad no aleatoria

Del pódcast Mutación matemática 193

Hace poco mi mujer se enfadó conmigo mientras conducíamos hacia un restaurante, en nuestra salida habitual de los sábados. Como siempre, enchufé mi iPhone a la radio del coche para reproducir música en modo aleatorio. Aquella noche mi teléfono decidió poner cuatro canciones de David Bowie seguidas. Debo admitir que Bowie ocupa una proporción no despreciable de mi lista —unas 160 canciones de unas 1 000—, pero aun así fue sorprendente escuchar solo a Bowie durante todo el trayecto; mi mujer pensó que había configurado el iPhone para poner únicamente a Bowie a propósito, solo para fastidiarla. ¿Es razonable que ocurra tal racha en una reproducción verdaderamente aleatoria?

Para responder, conviene pensar en probabilidades: ¿tiene sentido que de vez en cuando experimentemos una racha así? Es parecido a la conocida paradoja del cumpleaños. Imagina que estás en una fiesta con un grupo de amigos y preguntas sus cumpleaños buscando si dos coinciden. Pensarías que la probabilidad es baja: al preguntar a una persona al azar, la probabilidad de que comparta tu cumpleaños es solo 1/365. Sin embargo, la probabilidad de que entre 23 personas haya al menos una pareja con el mismo cumpleaños alcanza el 50%. Contraintuitivo, sí, pero si consideras cuántos pares posibles hay entre 23 personas —23 × 22 / 2 = 253 pares—, el número de pares pone las cosas en contexto y explica por qué la coincidencia es plausible.

El cálculo exacto es algo más laborioso. Una forma sencilla es analizar la fiesta persona por persona y calcular la probabilidad de que NO haya aún cumpleaños compartidos. P_1, la probabilidad de no tener coincidencias tras la primera persona, es 1 (no hay nadie antes). P_2 = 364/365, la probabilidad de que la segunda persona no comparta el cumpleaños del primero. P_3 = 363/365, la probabilidad de que la tercera no coincida con las dos fechas ya vistas. Y así sucesivamente. La probabilidad final de que nadie comparta cumpleaños es el producto P_1 × P_2 × P_3 × … hasta el número de asistentes. Si quieres ver la derivación

completa, la entrada de la Wikipedia sobre la Paradoja del cumpleaños la desarrolla. El resultado final es que con 23 asistentes la probabilidad de que no haya coincidencias es solo alrededor del 49%.

Ahora que hemos entendido la paradoja del cumpleaños —o al menos estamos dispuestos a admitida aunque no haya quedado del todo claro—, ¿qué tiene que ver esto con canciones en modo aleatorio? Como explica un autor en HowStuffWorks.com, podemos pensar en artistas repetidos en la lista de reproducción como si fueran "cumpleaños" compartidos. En mi caso, Bowie representa aproximadamente 1/6 de mi lista habitual. Por tanto, cada vez que suena una canción de Bowie, la probabilidad de que esa canción inicie una racha de cuatro Bowie seguidos es aproximadamente $(1/6)^3$, es decir 1 entre 216. He hecho muchos más de 216 viajes en coche en mi vida. Así que no solo no es inusual, sino que es esperado que aparezcan rachas de Bowie con cierta frecuencia. Y eso sin contar las rachas de otros artistas, que aunque tengan probabilidades algo más bajas, también aparecen ocasionalmente.

Además, hay que recordar nuestra predisposición humana a buscar patrones en la aleatoriedad. Cuando la función de barajar canciones apareció por primera vez en los reproductores, era habitual que la misma canción sonara dos veces seguidas o con pocas canciones de diferencia, y la gente pensaba que el aparato tenía un fallo. Y una vez que ocurre una vez, la confirmación selectiva hace que busquemos más repeticiones y concluyamos que el fallo está ahí. Nuestro cerebro no está "diseñado" para aceptar las coincidencias propias del azar. Una solución simple fue introducir una selección aleatoria sesgada: el dispositivo evita, por configuración del usuario, repetir artista o canción consecutiva. Otra mejora es que hoy muchos reproductores barajan la lista como si fuera un mazo de cartas, creando un orden aleatorio completo de todas las canciones en lugar de randomizar de canción en canción; esto evita repeticiones hasta que se vuelva a barajar.

Para ver un caso extremo de nuestra tendencia a detectar patrones, prueba esto: lanza cuatro monedas, anota los resultados y pide a un amigo que juzgue si parecen aleatorios. Pase lo que pase, probablemente le parecerán no aleatorios. Si sale una secuencia con 3 o

4 resultados iguales (por ejemplo C X C C), parecerá que la moneda está cargada. Si hay 2 caras y 2 cruces, inevitablemente parecerá un patrón —o una alternancia repetida, o una simetría—. Hay que esforzarse para convencer al propio cerebro de que se trata de un resultado perfectamente plausible de lanzamientos aleatorios.

Así que, cuando te enfrentes a cumpleaños en fiestas, lanzamientos de monedas, listas de reproducción que irritan a tu pareja o repeticiones musicales impertinentes, recuerda: a veces los resultados realmente aleatorios parecen no serlo. Intenta dar un paso atrás y pensar con calma en los procesos y probabilidades implicados.

Una verdadera celebración navideña

Del pódcast Mutación matemática 50

Hoy voy a contarte cómo celebrar de verdad la Navidad: ¡puedes inhalar una de las moléculas de aire que estuvieron en el primer aliento del Niño Jesús! En realidad, esta forma de celebración no requiere esfuerzo alguno, porque ya lo estás haciendo, lo planees o no. Pero quizá, si reconoces la naturaleza sagrada de algunas de tus moléculas, eso intensifique el espíritu de la estación.

¿Por qué digo que ya lo estás haciendo? Piensa en esto: una respiración humana promedio contiene un número de moléculas de aire aproximadamente igual a 10 elevado a la potencia 22. Ahora bien, un bebé es bastante pequeño, así que, por conveniencia, reduzcamos esa cifra a 10 elevado a 21 en el caso del Niño Jesús. Tras más de dos mil años, es razonable suponer que esas moléculas están bien dispersas por toda la atmósfera.

La atmósfera en su conjunto contiene un número de moléculas de aire aproximadamente igual a 10 elevado a 44. Así que la proporción de moléculas que efectivamente estuvieron en aquel aliento es de 10^{21} sobre 10^{44}, o sea, 1 en 10^{23}. Pero recuerda que cada una de tus respiraciones contiene, en promedio, 10^{22} moléculas de aire; así que en diez respiraciones inhalas unas 10^{23} moléculas. En el largo plazo, puedes esperar, en promedio, inhalar una molécula del Aliento del Niño Jesús cada 10 respiraciones. ¿No sientes ya que estás más cerca de Él?

Por cierto, si eres no cristiano como yo, no tienes por qué sentirte excluido de las fiestas. Este cálculo funciona igual de bien con Buda, Moisés, Mahoma, Zaratustra, Quetzalcóatl, Akenatón o la Eva mitocondrial, suponiendo que cada uno de ellos realmente existió y respiró nuestra atmósfera en algún momento. Yo escuché por primera vez este argumento aplicado al último aliento de Julio César, en el clásico Innumeracy de John Allen Paulos, aunque en realidad cualquier persona que viviera hace tanto tiempo (o más) sirve como candidato para este análisis.

Así que, sea cual sea tu tradición religiosa o no religiosa, celebra la

temporada festiva respirando hondo y compartiendo unas cuantas moléculas de aire con tus ancestros espirituales, biológicos o filosóficos.

Conocimiento olvidado

Del pódcast Mutación matemática 151

Hace poco me vino a la mente un curioso relato de ciencia ficción que había leído tiempo atrás, acerca de una época en la que los cálculos con lápiz y papel habían sido olvidados. Lo recordaba de manera vaga, pero unos minutos de búsqueda en la web revelaron que se trataba de un cuento de 1958 de Isaac Asimov titulado The Feeling of Power (La sensación de poder).

The Feeling of Power transcurre en un futuro lejano en el que, debido a la dependencia de las computadoras, nadie recuerda ya los principios básicos de las matemáticas, ni siquiera operaciones sencillas como sumar o restar a mano. Incluso los fundamentos del diseño de computadoras se han olvidado, porque durante generaciones los equipos han sido diseñados únicamente por programas automatizados incrustados en otras máquinas. En ese extraño mundo, un técnico talentoso llamado Aub descubre que puede realizar cálculos numéricos básicos con lápiz y papel, gracias a una nueva técnica a la que llama "grafítica". En realidad, su "descubrimiento" no es más que la aritmética común que enseñamos hoy en la escuela primaria. Aub presenta su grafítica a un grupo de funcionarios gubernamentales, quienes se asombran al verlo multiplicar números decimales sin ningún dispositivo electrónico. De inmediato quedan fascinados por la posibilidad de reemplazar las caras computadoras por mano de obra humana barata en todo el gobierno. En particular, se entusiasman con la visión de un misil tripulado —es decir, un misil suicida con un ser humano dentro— capaz de corregir su curso y realizar todos los cálculos necesarios a una fracción del costo de un ordenador militar. Al final, abrumado por la culpa ante la muerte y destrucción que su hallazgo traerá, Aub se suicida.

El relato está plagado de absurdos. El más evidente es que, con el almacenamiento barato y el vasto caudal de información disponible en Internet, ¿cómo podrían olvidarse del todo conocimientos tan básicos como la aritmética? Estoy bastante seguro de que dentro de mil años,

incluso datos tan oscuros e inútiles como los episodios del pódcast Mutación matemática seguirán siendo accesibles para cualquiera que los busque. El error de Asimov aquí es solo un ejemplo del mayor bochorno de la ciencia ficción del siglo XX: su incapacidad general —con pocas excepciones— de anticipar Internet y otras tecnologías modernas de la computación.

Pero hay un fallo lógico aún más grave en el cuento, y es difícil pasarlo por alto. Si los humanos pudieran realizar cálculos con lápiz y papel de manera más barata y eficiente que las computadoras, ¿por qué se habría olvidado jamás ese método? La gente sustituye herramientas viejas por otras más baratas y eficientes, no por unas más lentas y costosas. Asimov escribió en una época en que los ordenadores eran gigantescos y caros; pero incluso entonces, en las aplicaciones en que se usaban, ningún ser humano con lápiz y papel podía competir. ENIAC, la primera computadora de propósito general, ya existía desde hacía más de una década cuando Asimov escribió este cuento, y podía ejecutar 5.000 operaciones por segundo, muy por encima de la capacidad humana. Y cualquier escritor de ciencia ficción con algo de visión debería haber previsto que las computadoras solo se volverían más rápidas y más baratas, hasta alcanzar los gigaflops y teraflops —miles de millones y billones de operaciones por segundo— que manejamos hoy con naturalidad.

Con todo, el relato sí resuena de forma inquietante en ciertos aspectos. En los últimos años se ha visto una tendencia real a devaluar las habilidades aritméticas básicas en la escuela. Me frustró hace poco ver a un cajero de comida rápida incapaz de estimar que dos hamburguesas de 1,98 dólares costaban aproximadamente 4 dólares. Hoy la mayoría de la gente sabe que en situaciones cotidianas como compras o cuentas puede sacar la calculadora o usar la app del móvil. ¿Seguirá deteriorándose poco a poco la intuición numérica básica a lo largo de generaciones? También es preocupante que muchos jóvenes estadounidenses hoy vean mejores recompensas económicas en carreras como derecho o negocios, antes que en ciencia, matemáticas o ingeniería. Tal vez no sea tan descabellado pensar que, dentro de unas generaciones, nadie sepa diseñar un chip de computadora, porque todos dependan de la fabricación en masa de diseños ya existentes. Y

aunque toda la información quede documentada en archivos de Internet, ¿qué tan fácil será de comprender para una generación futura que haya perdido la experiencia básica en ingeniería?

Así que, a pesar de sus fallos, el cuento de Asimov sí nos deja algunos temas para reflexionar.

Exponentes al cuadrado

Del pódcast Mutación matemática 64

En la escuela, seguramente recuerdas que una de las primeras operaciones aritméticas que aprendiste fue la suma. Luego el concepto se extendió a la multiplicación: tomar un número x y sumarlo a sí mismo muchas veces. El paso lógico siguiente fueron los exponentes: tomar un número x y multiplicarlo por sí mismo muchas veces. Y probablemente ahí te detuviste: mientras tus clases de matemáticas se desviaban hacia otras direcciones, ya no te enseñaron ninguna otra operación en esa "escalera". Pero ¿por qué detenernos allí? Si las sumas repetidas se convierten en multiplicación, y las multiplicaciones repetidas en exponentes, ¿qué sucede con los exponentes repetidos?

Quizás te sorprenda saber que sí existen más operaciones en esta serie, aunque normalmente no las enseñan en la escuela. Después de la exponenciación viene lo que se conoce como tetración. La tetración suele simbolizarse con un número escrito en la parte superior izquierda de otro, a diferencia de la parte superior derecha donde se colocan los exponentes. Veamos un ejemplo: ¿qué significa 2 tetrado a la cuarta? Lo escribiríamos como un 2 con un pequeño 4 arriba a la izquierda: ${}^{4}2$. Esto equivale a 2 elevado a (2 elevado a (2 elevado a 2)) = $2^{2^{2^2}}$. Hay que ser cuidadosos: debemos empezar a expandir desde el exponente más alto, de lo contrario estaríamos multiplicando los exponentes entre sí. Así, ${}^{4}2$ se convierte en 2^(2^(2^2)), o sea 2^{16}, que es 65.536.

Ni que decir tiene que, con números enteros positivos, la tetración hace que los valores crezcan a una velocidad vertiginosa. Esto ayuda a explicar por qué no resulta demasiado práctica en la vida real: después de todo, la simple operación de la exponenciación ya nos permite expresar de forma concisa el número de átomos del universo, aproximadamente 10^{80}, es decir, un 1 seguido de 80 ceros. En contraste, si miramos el relativamente sencillo valor de tetración ${}^{3}10 = 10^{10^{10}}$, este es 10^(10^(10)), lo cual equivale a 10 elevado a diez mil millones, o un 1 seguido de diez mil millones de ceros. Ni siquiera podría empezar a

describir ${}^{80}10$ de forma comprensible, salvo diciendo “10 tetrado a la 80”. Es difícil imaginar una aplicación práctica que necesite semejantes magnitudes.

Pero incluso sin aplicaciones reales, algunos matemáticos encuentran que la tetración es un tema muy interesante de estudio. Con números pequeños puede mostrar propiedades extrañas. Por ejemplo, toma una calculadora e intenta calcular algunas tetraciones de la raíz cuadrada de 2. ${}^{2}\sqrt{2}$, o $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, es aproximadamente 1,63. $\sqrt{2}$ tetrado a 3 es aproximadamente 1,76. Y conforme aumentas la tetración, de manera sorprendente, $\sqrt{2}$ tetrado a valores cada vez mayores se acerca cada vez más a 2. En efecto, $\sqrt{2}$ tetrado hasta el infinito no explota en una cifra descomunal como esperarías, sino que simplemente converge en 2.

Además de estas convergencias en números pequeños, también se ha investigado mucho en las propiedades de la tetración en números complejos, lo cual genera bellísimas imágenes multicolores al representarlas gráficamente en el plano complejo. De hecho, existe un dominio web, tetration.org, dedicado por entero al estudio de esta operación, además de otros sitios centrados en este tema.

Y, como probablemente ya sospechabas, la tetración es solo el comienzo. Los matemáticos con mucho tiempo libre han definido operaciones adicionales en la serie: así como la tetración es una cadena de exponentes, la pentación es una cadena de tetraciones, la hexación una cadena de pentaciones, y así sucesivamente. Esta secuencia general se conoce como la serie de hiperoperaciones. Como con la tetración, ninguna de estas parece tener aplicaciones prácticas —al menos según pude comprobar con una rápida búsqueda en la web—. Pero, ¿desde cuándo eso ha detenido a los matemáticos?

Ahora bien, toda esta clase de operaciones es, en realidad, un subconjunto de una operación más general conocida como la función de Ackermann, definida por el matemático alemán Wilhelm Ackermann en la década de 1920, la cual sí tiene cierta importancia en la informática teórica. Así que, en algún nivel, estas hiperoperaciones mantienen un tenue vínculo con la realidad.

Dándote los dedos

Del pódcast Mutación matemática 75

Recuerdo un día, hace ya varios años, cuando mi hija —que entonces tenía 21 meses— volvió a casa del jardín de infantes, levantó la mano y contó con orgullo en voz alta: "Uno-dos-tres-cuatro-cinco". Mi entusiasmo decayó un poco cuando le pedí que contara las orejas de nuestro gato, y recitó la misma letanía: "Uno-dos-tres-cuatro-cinco". Por si te lo preguntas, nuestro gato es un poco mutante, pero no tanto: solo tiene las dos orejas de rigor. Eso sí, cuenta con 12 pezones, aunque ese es tema para otro episodio. Al parecer, para mi hija "uno-dos-tres-cuatro-cinco" era una palabra nueva, y la respuesta universal a cualquier pregunta que incluyera "contar" o "cuántos".

Esto me hizo reflexionar sobre el proceso de contar con los dedos. Muchos recordamos que, de pequeños, aprendimos primero a contar hasta 10 en las manos. Pero, ¿es ese realmente un uso eficiente del "inmueble digital"? Si lo piensas bien, usar los dedos para contar hasta 10 es una restricción muy artificial: asume que en cada momento solo puedes levantar un dedo. En cambio, si consideras cada dedo como un dígito binario —es decir, de base 2—, como un bit en la memoria de un ordenador, entonces tus manos equivalen a una memoria de 10 bits. Así, combinando los dedos en distintas posiciones, puedes representar números hasta $2^{10} - 1$, es decir, 1.023.

Esto lleva a otra pregunta: en sociedades premodernas, especialmente donde los mercaderes comunes no tenían acceso a cajas registradoras, ni a papel barato y abundante, ni a la educación suficiente para manejar un buen sistema de notación matemática, ¿cómo llevaban la cuenta de los números? Curioseando un poco en la red encontré artículos sobre gran variedad de métodos de conteo con los dedos en diferentes culturas.

En China, se ha transmitido durante generaciones un sistema para representar números hasta el 10 en una sola mano, basado en mover el pulgar, el índice y el medio a distintas posiciones, no solo hacia arriba o abajo. El método coreano "Chisenbop", más simple, asigna al pulgar el

valor 5 y a los otros dedos el valor 1 cada uno; levantando varios dedos a la vez, puedes representar del 0 al 10 en una mano. En cualquiera de estos dos sistemas, con ambas manos resulta fácil contar hasta 100, usando una para las unidades y la otra para las decenas.

Pero una vez que empiezas a variar posiciones, como hacían los chinos, se abre un mundo de posibilidades. En la Europa y el Oriente Medio medievales se utilizaba un sistema que combinaba posiciones de los dedos para contar hasta 100 en cada mano: el pulgar y el índice, en diez posiciones distintas, representaban las decenas, mientras que los otros tres dedos, en varias posiciones, representaban las unidades. Esto significa que, usando ambas manos, se podían mostrar todos los números de cuatro cifras en base 10 —hasta 9.999—. El inconveniente, claro, es que exigía una destreza manual considerable. ¿Puedes doblar a medias el meñique y el medio, dejar erguido el anular y hacer que el índice toque la mitad del pulgar? Ese es el número 15 en este sistema. Yo intenté representar algunos números con las manos y resulté bastante inútil. ¿Te imaginas realizar toda una serie de estas posiciones en ambas manos y mantenerlas el tiempo suficiente para cerrar una transacción comercial?

En cualquier caso, ¿podemos superar los 10.000? Encontré además un comentario intrigante en un sitio de yoga, sobre un sistema que usa las falanges o puntas de cada dedo. Así, cada dedo no pulgar puede representar cuatro valores posibles, y el pulgar tres, dando un total de $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 3 = 768$ combinaciones en una mano. Con dos manos, eso son $768 \times 768 = 589.824$ combinaciones posibles. Algo me dice, sin embargo, que ni el maestro de yoga más avanzado sería capaz de semejante proeza teórica.

Por otro lado, yo ni siquiera consigo contar hasta 10.000 con mis dedos como un mercader medieval, así que ¿quién soy yo para juzgar lo posible? Quizá alguno de ustedes, campeones de videojuegos, pueda lograr hazañas de destreza manual que yo ni siquiera puedo concebir.

CAPÍTULO 2

Hacia lo infinito

¿Qué significa realmente la palabra infinito? Esta es una de las ideas matemáticas más extrañas con las que podemos intentar retorcer nuestra mente. ¿Representa todo lo que existe en el universo? ¿Es simplemente un número más grande que todos los demás números? ¿Puede haber algo mayor que el infinito? Cuando uno trata de pensar con cuidado en el concepto de infinito, todas las nociones preconcebidas parecen venirse abajo. Además, existe una cierta asociación implícita con la religión: ¿cuántas fes modernas se refieren a Dios como "El Infinito" en alguna de sus formas? La idea de múltiples infinitos fue el tema del primer episodio de Mutación matemática, y en muchos episodios posteriores hemos explorado distintos aspectos de este concepto.

Demasiado infinito para mí

De los pódcast Mutación matemática 0 y 5

Hoy quiero hablar del Hotel de Hilbert, una famosa paradoja introducida por el matemático David Hilbert, que desafía nuestras ideas ingenuas sobre el infinito. Imagina un hotel con un número infinito de habitaciones, numeradas con los números naturales 1, 2, 3, … Por supuesto, esto no puede existir en la realidad (aunque escuché que intentan construir uno al lado del Mall of America). Ahora bien, supongamos que llegas a la recepción y te dicen que el hotel está lleno. ¿Pueden aún así encontrarte una habitación?

Sorprendentemente, la respuesta es sí, siempre que consigan un poco de cooperación de los huéspedes actuales. El huésped en la habitación 1 se mueve a la 2. El de la 2 se mueve a la 3. En general, el huésped en la habitación n se traslada a la n+1. Como todos los números pueden incrementarse, cada huésped conserva una habitación… y tú también obtienes una.

Ahora imagina que te casas con otra persona apasionada por las matemáticas, pruebas los últimos y más potentes fármacos de fertilidad, y nueve meses después tu esposa da a luz a un conjunto de infinitillizos, un hijo por cada número natural. Una vez que crecen lo suficiente, tú y tu familia infinita deciden vacacionar en el Hotel de Hilbert, y llegan a la recepción exigiendo suficientes habitaciones para todos. ¿Pueden arreglárselas? Sí, de nuevo pueden. El huésped en la habitación 1 se mueve a la 2. El de la 2 se mueve a la 4. Y el de la habitación n se traslada a la 2n. Como todos los números pueden duplicarse, todos los huéspedes siguen teniendo cuarto. Y ahora quedan libres todas las habitaciones impares, que son infinitas, para tu familia.

Lo que estamos viendo aquí es que, en cierto sentido, todos los conjuntos infinitos numerables son equivalentes, incluso cuando algunos parecen ser subconjuntos de otros. Al mover huéspedes a distintas habitaciones, estamos en efecto estableciendo correspondencias entre el conjunto actual de cuartos (los enteros del 1 en adelante) y otros conjuntos: los enteros mayores que 1, o los números pares. Usando estas correspondencias, cada uno de estos conjuntos puede ser plenamente acomodado en nuevas habitaciones del Hotel de Hilbert, mientras otras quedan libres.

Ahora planteemos otra pregunta: ¿es posible que llegue un número tan grande de huéspedes que ya no puedan acomodarse en el hotel? Sorprendentemente, la respuesta aquí también es sí.

Supón que los fármacos de fertilidad fueron más efectivos de lo esperado y tu esposa ha dado a luz a un conjunto muy especial de infinitillizos. No es un conjunto común y corriente: tienes tantos hijos como números reales no negativos menores que 1. Uno lleva en su camiseta el número 0.11111 (repetido), otro 0.12345, otro un decimal con todas las cifras de n, y así sucesivamente. Para mantener el orden, das a cada niño una camiseta con un número real diferente (sin colas infinitas de 9, para evitar complicaciones técnicas).

Ahora, al llegar al hotel, decides que cada hijo debe tener su propia habitación. Entran en fila, y tú vas anotando algo a medida que se registran. Comienzas escribiendo un punto decimal en tu papel. Cuando el primer hijo entra en la habitación 1, anotas el primer dígito de su

camiseta. Para el segundo hijo (habitación 2), anotas el segundo dígito, y así sucesivamente. Una vez que todas las habitaciones están ocupadas, has escrito un número real cuyo primer dígito coincide con el del niño de la habitación 1, el segundo con el del niño de la habitación 2, y así sucesivamente.

Luego, debajo de ese número, escribes otro: si el dígito original es 8 o 9, anotas un 0; de lo contrario, sumas uno al dígito y lo escribes debajo (por ejemplo, bajo el número 0.2859328… escribirías 0.3060430…). Este nuevo número no puede coincidir con ninguno de los de los niños alojados: su primer dígito difiere del del cuarto 1, su segundo difiere del del cuarto 2, y en general su n-ésimo dígito difiere del del niño en la habitación n, para cualquier valor de n.

Pero dijimos que tenías un hijo por cada número real menor que 1. Así que el niño con el número que acabas de escribir está en el vestíbulo, llorando porque lo ignoraste. Quizá quieras comprarle un helado para calmarlo. Eso sí, espero que hayas traído mucho cambio, porque un número infinito de sus hermanos, cuyos números pueden descubrirse con variantes del mismo método, también quedaron fuera.

Esto es, en esencia, la famosa demostración diagonal descubierta por Georg Cantor en 1891, que muestra que no todos los infinitos son iguales. El infinito no numerable de los números reales es estrictamente mayor que el infinito numerable de los enteros positivos: no importa cómo intentes asignar enteros a cada número real, siempre quedarán algunos números reales sin corresponder.

Infinitamente adelantado a su tiempo

Del pódcast Mutación matemática 116

Como mencionamos antes, el matemático del siglo XIX Georg Cantor fue el fundador de la teoría moderna de conjuntos y demostró muchos resultados sorprendentes relacionados con el infinito, como la prueba de que el infinito de los números reales es mayor que el infinito de los números enteros. Estos resultados hoy son aceptados como parte de los fundamentos de la matemática moderna; si asististe a una escuela primaria en Estados Unidos en los años sesenta, puede que incluso recuerdes la efímera moda de la "Nueva Matemática", que intentó enseñar teoría de conjuntos a los niños. Pero quizá te sorprenda saber que en su propio tiempo, las teorías de Cantor fueron vistas por muchos como incorrectas, peligrosas o incluso blasfemas. Y, curiosamente, encontró apoyo entre ciertos católicos religiosos, mientras que sus ideas eran rechazadas por prominentes figuras del mundo matemático.

Para empezar, repasemos las teorías más controvertidas de Cantor. Antes de él, el infinito se concebía como una abstracción vaga, no algo susceptible de un análisis formal. Cuando Cantor desarrolló la teoría de conjuntos, definió que dos conjuntos tienen la misma cardinalidad (el mismo número de elementos) cuando es posible establecer una correspondencia uno a uno entre ellos. Una vez establecida esta definición, parecía razonable aplicarla también a los conjuntos infinitos. Al considerar el conjunto infinito de los números naturales (1, 2, 3, …) y el conjunto infinito de los números reales (todos los decimales), se preguntó si ambos tenían la misma cardinalidad. Con su célebre demostración diagonal mostró que, sin importar cómo se intente establecer una correspondencia entre números naturales y reales, siempre quedarán números reales fuera. Así, aunque ambos conjuntos sean infinitos, el infinito de los naturales resulta más pequeño que el de los reales. Y extendiendo esta idea, para cada conjunto infinito podía definirse un conjunto potencia mayor, determinando una jerarquía infinita de infinitos.

En la comunidad matemática, había tres grandes grupos que se

oponían a sus ideas. Los constructivistas, entre ellos el propio mentor de Cantor, Leopold Kronecker, creían que un objeto matemático no podía existir sin un método explícito para construirlo. Como cualquier intento de construir un conjunto infinito nunca termina, sus resultados sobre el infinito quedaban invalidados. Kronecker incluso llegó a llamar a Cantor "corruptor de la juventud" por enseñar esas teorías extrañas a sus alumnos. Los intuicionistas, como Henri Poincaré, tenían una objeción relacionada pero distinta: concebían la matemática como una herramienta para analizar más profundamente las nociones intuitivas de la mente humana. Un conjunto infinito no numerable, como el de los números reales, quedaba más allá de la intuición humana y, por lo tanto, no podía analizarse matemáticamente. Los finitistas eran una derivación más estricta de estas dos corrientes: sostenían que ningún objeto matemático podía existir si no era construible a partir de números naturales en un número finito de pasos.

En el plano religioso, muchos teólogos cristianos se escandalizaban ante la noción de múltiples tipos de infinito, pues solo reconocían un infinito verdadero: Dios. Sin embargo, Cantor se esforzó por atraer a la comunidad religiosa a su lado: sostenía que sus múltiples infinitos realzaban la gloria divina, considerando a Dios como un infinito absoluto por encima de la jerarquía de infinitos matemáticos que él había descubierto. De hecho, ¿acaso no hacía a Dios aún más poderoso el hecho de que, bajo Él, existieran no solo realidades finitas, sino también un conjunto infinito de infinitos menores? Escribió a numerosas figuras influyentes, incluido el Papa. Aunque sus esfuerzos tuvieron resultados mixtos, logró ganarse a algunos filósofos religiosos reconocidos, como el sacerdote católico Constantin Gutberlet, quien creía que las teorías de Cantor ofrecían al hombre una herramienta para indagar más profundamente en la naturaleza de lo Divino. En una curiosa ironía histórica, en ciertos momentos Cantor parecía tener más apoyo en la Iglesia católica que en la propia comunidad científica.

Toda la controversia en torno a sus ideas le pasó factura, provocándole problemas de depresión durante toda su vida, aunque algunos estudios modernos sugieren que también pudo haber padecido un trastorno bipolar no diagnosticado. Tras ser promovido a profesor titular a los 34 años y publicar una serie de artículos fundamentales

que sentaron las bases de la teoría de conjuntos, en 1884 se le pidió que retirara un artículo de la prestigiosa revista Acta Mathematica. Poco después fue hospitalizado por depresión y se apartó de la matemática durante un tiempo. Curiosamente, dedicó esos años a investigar las obras de Shakespeare y publicó varios folletos en los que sugería que Francis Bacon era el verdadero autor de las piezas. Unos años después pareció recuperarse y regresó a su profesión, pero en 1899 sufrió otro episodio de depresión, y estos se repitieron cada pocos años. Aunque siguió activo en el ámbito matemático, su trabajo continuó siendo polémico. Finalmente murió en la pobreza en 1918.

Sin embargo, hacia el final de su vida las matemáticas de Cantor empezaban a ser cada vez más aceptadas, y en vida recibió varios honores prestigiosos. En 1904, la Royal Society de Londres le concedió la Medalla Sylvester, su mayor distinción. Y en 1911 fue uno de los distinguidos académicos extranjeros invitados al 500.º aniversario de la fundación de la Universidad de St Andrews, en Escocia. David Hilbert, una de las figuras más influyentes de la matemática del siglo XX, resumió la importancia de su obra con estas palabras:

“Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor ha creado.”

Infinitos infinitos

Del pódcast Mutación matemática 157

Hace poco, una noche, le dije a mi hija que faltaban 10 minutos para irse a la cama. Ella me contestó:

—¡No, infinitos minutos!

Naturalmente, respondí:

—¿Hablas de un infinito numerable, análogo al de los enteros, o del infinito no numerable de los números reales?

Como me miró con cara de póker y sin responder, concluí que tendríamos que atenernos al plan original de los 10 minutos.

Pero después me di cuenta de que mi pregunta no era del todo válida. En lugar de solo dos clases de infinito, en realidad existen infinitos infinitos, cada vez mayores. Y esto puede demostrarse con relativa facilidad a partir de una variante del célebre argumento diagonal de Cantor, el mismo que usamos para probar que hay más números reales que enteros.

La clave está en reconocer que para todo conjunto existe un conjunto potencia, es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de sus elementos, que siempre resulta estrictamente mayor. Por ejemplo, toma el conjunto con elementos a, b y c. Su conjunto potencia contiene los subconjuntos {a,b}, {b,c}, {a,c}, además de los subconjuntos unitarios {a}, {b}, {c}, el conjunto vacío, y el conjunto completo {a,b,c}. Para un conjunto finito, es obvio que el conjunto potencia es más grande que el conjunto original.

¿Y qué ocurre con un conjunto infinito? Al principio también parece obvio: como todos los conjuntos unitarios forman parte del conjunto potencia, este contiene al menos todos los elementos originales más otras cosas. Sin embargo, este razonamiento no funciona con infinitos. Un contraejemplo simple es comparar el conjunto de los números enteros con el de los números pares. A primera vista, parecería que los enteros son el doble, porque incluyen pares e impares. Pero como ya vimos con el Hotel de Hilbert, podemos hacer corresponder cada entero par 2N con la habitación N, y queda claro que ambos conjuntos tienen

la misma cardinalidad. Así, sus infinitos son equivalentes.

Entonces, para probar que el conjunto potencia P de un conjunto S es realmente mayor, debemos demostrar que cualquier intento de establecer una correspondencia 1 a 1 dejará inevitablemente un elemento de P sin pareja. Pensemos de nuevo en el Hotel de Hilbert, con habitaciones numeradas para cada elemento de P. Supongamos que llegan huéspedes con etiquetas de cada elemento de S, y que cada uno recibe una habitación. ¿Habrá siempre una habitación sobrante?

Definamos un conjunto Q: el conjunto de huéspedes que están en habitaciones cuya puerta no incluye su etiqueta. (Q no está vacío: al menos hay un huésped en la habitación rotulada con el conjunto vacío). Como Q es un subconjunto de S, debe existir una habitación cuya puerta esté rotulada con Q.

Ahora bien, ¿qué ocurre con el huésped asignado a esa habitación Q?

Si su etiqueta aparece en la puerta, hay una contradicción, pues Q se definió como el conjunto de los huéspedes que no están en habitaciones con su etiqueta en la puerta.

Si su etiqueta no aparece en la puerta, entonces este huésped está en una habitación sin su etiqueta… lo que significa que sí debería estar en Q, de acuerdo con la definición. Otra contradicción.

Por lo tanto, nadie puede ocupar la habitación Q, lo que contradice la hipótesis inicial de que todas estaban llenas. De esta manera se demuestra que el conjunto potencia es estrictamente mayor que el conjunto original. Y dado que todo conjunto, incluso un conjunto potencia, tiene a su vez un conjunto potencia mayor, la conclusión es que existe una secuencia infinita de infinitos, cada vez más grandes.

Así que, la próxima vez que tu hijo intente retrasar la hora de dormir, estarás preparado para debatir en detalle qué clase de infinito está reclamando.

Infinito por infinito

Del pódcast Mutación matemática 184

Si viste televisión estadounidense hacia 2012 o 2013, quizá recuerdes aquel anuncio ridículo en el que un entrevistador hablaba con un grupo de niños y les pedía que dijeran el número más grande que se les ocurriera. Uno gritaba: "¡Infinito!", y otro lo superaba con "¡Infinito + 1!". El presentador respondía: "Lo siento, estaba buscando infinito + infinito". Y finalmente una niña se llevaba la gloria exclamando: "¿Y qué tal infinito por infinito?"

La idea era hacer reír al espectador con estas manipulaciones sin sentido del infinito. Pero lo curioso es que existe una extensión bien definida de los números reales que incluye operaciones coherentes con el infinito, lo bastante claras como para comparar infinito + 1, infinito + infinito e infinito por infinito.

Este sistema se conoce como los números surreales. Fue definido (o descubierto, según se mire) por John Conway y luego popularizado en un libro de Donald Knuth. El procedimiento es inusual, pero con muy buenas razones: no basta con inventar algo arbitrario y llamarlo "infinito", sino que se trata de crear un sistema numérico coherente, que incluya a los reales que ya conocemos, que añada infinitos y que se comporte de manera razonable bajo operaciones como suma y multiplicación.

La definición es así: un número surreal es un par de conjuntos, uno izquierdo y otro derecho, tal que cada elemento del conjunto izquierdo es menor que todos los del derecho. En casos simples, se interpreta como un valor intermedio. Por ejemplo, ½ puede representarse con el conjunto izquierdo {0} y el derecho {1}. Todo número real puede describirse como un conjunto izquierdo infinito con todos los racionales menores que él, y un conjunto derecho infinito con todos los racionales mayores. Esta construcción permite definir operaciones aritméticas básicas y demostrar que son cerradas: si empiezas con números surreales, el resultado siempre será otro número surreal válido.

¿Y qué tiene que ver esto con el infinito? Pues que los conjuntos izquierdo y derecho pueden ser infinitos. Así, existe un número surreal definido por el conjunto izquierdo de todos los enteros y el conjunto derecho vacío. Este número es infinito, mayor que cualquier entero, y se denota tradicionalmente con la letra griega ω (omega). A partir de él podemos definir ω + 1, ω + 2, hasta ω + ω. Luego, multiplicando, podemos construir 2ω, 3ω y así sucesivamente, hasta llegar a ω × ω. Exactamente lo que decía aquella niña del anuncio. Y, por supuesto, no hay razón para detenerse ahí: podemos elevar ω a potencias arbitrarias y obtener números aún mayores, como ω^{ω}.

El sistema también permite manipulaciones interesantes: restar enteros a ω (ω – n sigue siendo infinito, pero menor que ω), o dividirlo (ω/2 sigue siendo infinito, pero más pequeño). Además, ω tiene un inverso: ε (épsilon), un número infinitesimal, mayor que 0 pero menor que cualquier real positivo. Como era de esperar, ω = 1/ε, y por tanto ε × ω = 1.

Conviene aclarar que ya en el siglo XIX Cantor había introducido un concepto de ω dentro de su teoría de números ordinales, definiéndolo como el menor infinito que mide la cardinalidad de un conjunto bien ordenado. En su sistema, operaciones como la suma y la multiplicación no eran conmutativas: 1 + ω = ω, pero ω + 1 > ω. Los números surreales, en cambio, resultan más satisfactorios para muchos matemáticos, porque conservan propiedades aritméticas más familiares, como que 1 + ω = ω + 1.

¿Y sirven para algo más que para inspirar anuncios excéntricos? Curiosamente, Conway inventó los números surreales mientras analizaba matemáticamente el juego del Go. Las constantes infinitas no eran su objetivo, sino un subproducto de sus investigaciones en teoría de juegos. La gran lección aquí es que, con definiciones cuidadosas, conceptos que parecen demasiado extraños o nebulosos —como las operaciones aritméticas con infinitos— pueden adquirir pleno sentido. Incluso para un grupo de niños de cinco años.

Perímetro infinito, área finita

Del pódcast Mutación matemática 21

Supongamos que te pido que dibujes una figura con perímetro infinito pero área finita. ¿Podrías hacerlo? Bueno, no literalmente —tu muñeca se cansaría bastante intentando dibujar un perímetro infinito—, pero quizá te sorprenda saber que sí podemos describir figuras así. Un ejemplo famoso es el copo de nieve de Koch, o estrella de Koch, descrito por el matemático Helge von Koch en 1904.

Para definir esta figura, comienza con un triángulo equilátero. Ahora dibuja una "punta" que sobresalga en el tercio central de cada lado: imagina ese tercio como la base de un triángulo equilátero más pequeño, y dibuja los otros dos lados, borrando el segmento original. Tras hacerlo en los tres lados, la figura parecerá una estrella de seis puntas. Luego repite el proceso en cada uno de los doce segmentos resultantes, y así sucesivamente.

Continúa infinitas veces, agregando picos en el tercio central de cada segmento. El resultado, semejante a un copo de nieve de complejidad infinita, es la estrella de Koch.

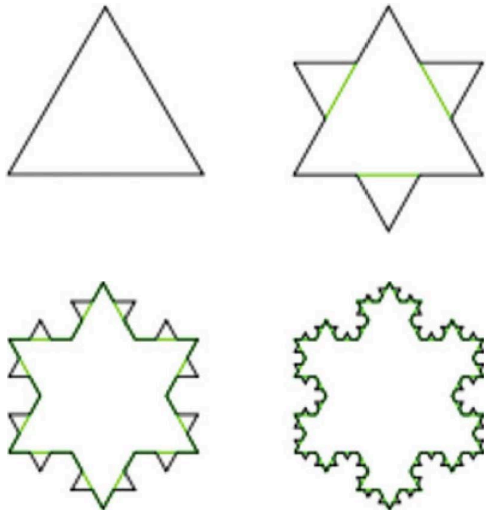


Figura 2-1. Primeros pasos para construir el copo de nieve de Koch[1]

¿Tiene realmente un perímetro infinito? Sí. Cada paso multiplica la longitud total de cada segmento por 4/3. Multiplicar el perímetro

original por un número mayor que 1 infinitas veces, inevitablemente, nos lleva a un resultado infinito.

¿Y el área? Sorprendentemente, es finita. La forma más sencilla de verlo es dibujar un círculo que encierre apenas la estrella de seis puntas de la primera iteración, tocando cada vértice. Ninguno de los picos posteriores puede traspasar ese círculo, de modo que el área total siempre será menor o igual que la del círculo inicial.

La importancia de esta figura es que constituye uno de los ejemplos más simples de fractal. Los fractales son interesantes porque revelan más detalle cuanto más los observamos de cerca. Si miras una estrella de Koch a simple vista, alguna parte puede parecerte lisa; pero bajo una lupa encontrarás mayor complejidad, pues todo segmento tiene, por definición, un pico en su centro.

Estas figuras sirven como modelos de fenómenos naturales como montañas o líneas costeras. Una costa puede verse suave desde un avión; al caminar por la playa, descubres irregularidades mucho más marcadas; y bajo el microscopio, los granos de arena revelan un nivel de detalle aún mayor. Por esa capacidad de representar complejidad, los fractales tienen aplicaciones en geología, sismología, medicina, arte y otros campos.

Una biblioteca bastante grande

Del pódcast Mutación matemática 15

¿No sería maravilloso entrar en una biblioteca y tener la garantía de que cualquier libro posible está allí? No me refiero solo a los que ya se han escrito, sino a todos los que podrían escribirse jamás.

Supongamos que fijamos un límite de 410 páginas por volumen (los libros más largos se dividen en varios tomos). Cada página con 40 líneas, cada línea con 80 caracteres: 3200 caracteres por página. Multiplica por 410, y tenemos 1.312.000 caracteres por libro. Si admitimos 30 símbolos posibles (26 letras, espacio, punto, coma y comillas), el número total de libros posibles es 30 elevado a 1.312.000. Una cifra inimaginable.

Claro que la física moderna dice que en el universo observable hay del orden de 10^80 átomos. Incluso con una tecnología que guardara un libro en cada átomo, no cabría toda esta biblioteca. Ni siquiera como versión virtual. Pero es divertido especular.

Las implicaciones son tremendas:

Contendría todo lo que escribirás en tu vida… así que mejor busca otra profesión de escritor.

Incluye todos los episodios de Mutación matemática, incluso los que no he grabado todavía. Y también falsas versiones donde me equivoco en todo.

Está el libro de profecías que narra la historia humana entera hasta nuestra caída. Y también miles de libros de herejías, de malos consejos, o colecciones completas de escritos de Dr. Phil.

Encontrar el volumen correcto sería otro asunto. Por suerte, también debe existir un índice, una especie de catálogo multivolumen. Eso sí, hay índices falsos que funcionan unas cuantas veces antes de mandarte a estanterías erróneas a años-luz de distancia. Incluso uno que siempre te conduce a versiones falsas de cualquier libro, donde el último capítulo ha sido sustituido por letras de Yoko Ono. Así que quizá estemos perdidos de todas formas.

Como habrás adivinado, la idea no es mía: proviene del relato clásico

La biblioteca de Babel de Jorge Luis Borges. Recomiendo vivamente sus Ficciones completas, que exploran con maestría estas fronteras entre matemáticas y literatura.

Alguien tumbó mi 8

Del pódcast Mutación matemática 28

El símbolo de infinito ∞, ese ocho acostado, siempre me pareció raro. Quizá porque, como el propio concepto de infinito, es algo extraño dentro de la notación matemática. No es una letra, como la mayoría de nuestras constantes (π, e, n), y además resulta bajito y gordo comparado con otros signos.

Fue el matemático inglés John Wallis quien lo usó explícitamente por primera vez en 1655, aunque nunca explicó por qué. ¿De dónde salió entonces?

El escritor Rudy Rucker, en su clásico Infinity and the Mind, bromeaba diciendo que era un circuito de carreras en forma de ocho, donde los coches pueden girar eternamente. Divertido, pero poco probable en 1655.

Otros sugieren que representa una cinta de Moebius: esa tira de papel torcida y unida por los extremos en la que una línea puede recorrer ambas caras sin levantar el lápiz. Es cierto que evoca al infinito, y vista desde cierto ángulo se parece al símbolo. Pero la cinta fue descubierta en 1858, mucho después de Wallis.

También se lo ha relacionado con símbolos religiosos antiguos, como el ouroboros, la serpiente o dragón que se devora la cola. Aparece en textos platónicos, en el cristianismo, en ruinas aztecas y religiones africanas.

Otra posibilidad es que Wallis lo tomara de letras griegas o romanas. Tal vez una deformación de la omega (ω), última letra del alfabeto griego. O una variante del símbolo etrusco y romano para mil, que a veces indicaba “cantidad grande”: una C, luego una línea vertical, y luego otra C invertida.

Me gusta aún más otra explicación: un reloj de arena tumbado. En esa posición, el tiempo parece detenido: cualquier intervalo sería infinito (hasta que el sol se convierta en nova y derrita el vidrio, claro).

Por último, está la versión más prosaica: crear un símbolo nuevo era una molestia para los tipógrafos de la época, así que Wallis

simplemente recostó el 8 para ahorrar trabajo. Esta me resulta deliciosa, porque convierte todas las otras hipótesis en conjeturas rebuscadas. Y, por supuesto, me incluye a mí entre los que se rompen la cabeza con ello. Pero quizá nunca lo sabremos con certeza.

Casi infinito

Del pódcast Mutación matemática 186

En una de las secciones anteriores hablamos de un grupo de niños de jardín de infantes desafiados a nombrar el número más grande, que acabaron eligiendo “infinito por infinito” como campeón. Pero ¿qué pasaría si hubieran impuesto una regla contra los infinitos? Como cualquier lector perspicaz habrá notado, sería una regla bastante tonta, porque precisamente la gracia del infinito es que los números nunca terminan: sea cual sea la respuesta, siempre puedes nombrar un número mayor.

Ahora bien, si la pregunta es cuál es el número más grande realmente usado en una demostración matemática seria, la cosa se pone más interesante. En ese caso, no sería raro que algún niño hubiera mencionado el Número de Graham, popularizado por Martin Gardner en una columna de Scientific American en 1977, y que durante años apareció en el Libro Guinness de los récords como el número mayor jamás empleado en una prueba matemática.

¿Y qué es el Número de Graham? Nace de una discusión del matemático estadounidense Ron Graham sobre cómo conectar todos los vértices de un hipercubo n-dimensional y colorear sus aristas. La pregunta es: ¿cuál es el menor valor de n para el que, usando dos colores, se garantiza la existencia de un subgrafo completo monocromático de 4 vértices? En realidad, no hace falta comprender del todo el problema para hablar del número.

Para describirlo, debemos empezar con la notación de flechas de Knuth. Es una generalización de los exponentes. “a ↑ b” equivale a a elevado a b. Así, $4 \uparrow 3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$. Añadir más flechas significa repetir la operación previa: $4 \uparrow\uparrow 3$ significa “4 tetrado a 3”, es decir, 4^(4^4) = 4^256, un número con más de 150 cifras. Y $4 \uparrow\uparrow\uparrow 3$ significa 4 tetrado a (4 tetrado a 4), un valor ya directamente astronómico.

Con esta notación podemos definir el Número de Graham:

$g_1 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$, que ya es inconcebiblemente enorme.

$g_2 = 3 \uparrow^{g_1} 3$, es decir, 3 elevado con tantas flechas como el valor

completo de g_1.

Así se repite el proceso durante 64 pasos, hasta llegar a g_{64}.

El Número de Graham, G, es precisamente g_{64}. La página de la Wikipedia señala que si intentaras escribirlo en notación decimal, el universo observable no bastaría para contenerlo, ni siquiera suponiendo que cada dígito cupiera en un volumen de Planck (10^{-105} m^3).

Tras su aparición en Scientific American y el Guinness, el número se popularizó en la cultura general: se cuenta, por ejemplo, que un taxista llegó a preguntárselo a un matemático. Paradójicamente, el propio Graham confesó después que el número que hizo famoso era en realidad una cota más grande de la necesaria en su prueba: lo eligió porque la forma exacta era demasiado complicada para explicarla al público no especializado.

Tampoco deberíamos tomar al Guinness como referencia matemática: su web llegó a describir “el infinito más pequeño” como “la suma de todos los enteros”, definición más bien chapucera. Además, desde entonces se han descrito números aún más colosales en otras pruebas, aunque ninguno alcanzó la notoriedad del Número de Graham.

Lo que más me divierte de este número es la sensación intimidante que produce pensar en algo tan vasto que, escrito en papel, ese papel llenaría el universo entero. De algún modo, al hablar de infinitos en este pódcast nos hemos vuelto casi indiferentes, como si fueran conceptos comunes. Y sin embargo, cualquier infinito es mayor que el Número de Graham. Quizá convenga de vez en cuando volver a estas cifras gigantescas, para recordar cuán inabarcable es realmente lo infinito.

Números gigantes al revés

Del pódcast Mutación matemática 203

Cuando se trata de números grandes, nuestro universo no es muy cooperativo. Claro que depende de lo que llames "grande". La edad del universo es de unos insignificantes 14.000 millones de años ($1{,}4\times10^{10}$). El radio del universo observable se estima en 46.000 millones de años luz, unos $4{,}6\times10^{25}$ metros. Y el número de átomos contenidos en él ronda los 10^{80}. ¿Te parecen cifras colosales? Para mí resultan casi mediocres: ninguna de ellas tiene exponentes dentro de exponentes. Como vimos antes, es trivial escribir un número mucho mayor con un par de símbolos.

Pero ¿podemos relacionar números aún más grandes con realidades físicas? El autor Robert Munafo mantiene una excelente página web —enlazada en las notas del episodio— repleta de ejemplos de números inmensos con algún significado en física.

Algunos casos fronterizos provienen de juegos o pasatiempos. El número de posibles partidas de ajedrez se estima en $10^{10^{50}}$. En el juego de las "cuatro cifras 4", donde uno intenta escribir el mayor número posible usando solo cuatro cuatros y operaciones básicas, se llega a valores como $4^{4^{4}}$, que ya es monstruoso. Pero se podría discutir si estas construcciones, fruto de reglas humanas, cuentan como "números físicos".

En otro nivel, hay especulaciones más osadas basadas en teorías cosmológicas. Por ejemplo, algunos cálculos estiman que en el multiverso existen del orden de $10^{10^{82}}$ universos. El físico Max Tegmark, yendo aún más lejos, calculó que en un universo infinito y aleatorio, debe de existir otra copia exacta de nuestro universo observable a una distancia de $10^{10^{115}}$ metros.

Mi clase favorita de estos números "físicos" surge de las probabilidades diminutas, tal como describió Richard Crandall en un artículo clásico de Scientific American (1997). Son sucesos posibles en la física, aunque con probabilidades tan ridículas que jamás ocurrirán en la práctica. Pero me resultan más satisfactorios que los ejemplos de

juegos.

Un loro que, frente a una máquina de escribir durante un año, produzca una novela de Sherlock Holmes: probabilidad 1 en $10^{3.000.000}$.

Una lata de cerveza apoyada en una mesa que, de pronto y sin causa, se vuelque sola en el próximo año: 1 en $10^{10^{33}}$ ($10 \wedge 10^{33}$).

Un ratón sobreviviendo una semana sobre la superficie del sol gracias a fluctuaciones locales: 1 en $10^{10^{42}}$.

Tú, siendo teletransportado espontáneamente a Marte: 1 en $10^{10^{51}}$.

Estas cifras demuestran que las probabilidades ínfimas son un excelente recurso para visualizar números enormes, mucho más allá de los míseros 10^{80} átomos de nuestro universo. Y si no apareces de golpe en Marte, quizá puedas imaginar más ejemplos de improbabilidades tan extremas que nos hagan palpar la inmensidad de lo numérico.

CAPÍTULO 3

Explorando la geometría

Desde los tiempos de Euclides, generaciones de estudiantes se han asombrado con el nivel de comprensión que se puede alcanzar sobre las formas básicas del mundo que nos rodea, partiendo de unas pocas observaciones y principios elementales. ¿No es increíble que puedas dibujar cualquier triángulo en una hoja de papel, sin decirme nada más sobre él, y yo sepa que la suma de sus ángulos será exactamente 180 grados? Seguramente aprendiste ese hecho en la escuela, pero —a menos que tuvieras mucha suerte o un profesor excepcional— tu manual lo habrá despojado de toda su magia. Aquí nos centraremos en un pequeño conjunto de temas geométricos que aún me entusiasman, décadas después de mis clases de geometría en secundaria.

Algo que Euclides pasó por alto

Del pódcast Mutación matemática 171

Te propongo un experimento. Toma una hoja de papel e intenta, con tu abundante talento artístico, dibujar un triángulo. Cualquiera: equilátero, isósceles, rectángulo o simplemente uniendo tres puntos al azar. Ahora triseca cada ángulo: dibuja dos líneas que lo dividan en tres partes iguales. Verás que cerca del centro del triángulo hay tres puntos donde se cruzan pares de estas líneas. Únelos, y obtendrás un pequeño triángulo central. Y aquí viene lo sorprendente: sea cual sea el triángulo original, ese triángulo interior siempre resulta ser equilátero, con lados iguales y ángulos de 60 grados. ¿Cómo puede ser?

Ese pequeño triángulo equilátero se conoce como el triángulo de Morley. Uno pensaría que un truco tan sencillo —trazar líneas en un triángulo y obtener en el centro una figura perfecta— habría sido descubierto ya en la geometría clásica de Euclides. Pero no: Euclides y sus contemporáneos se concentraban en construcciones realizables con compás y regla, y la trisección de un ángulo no es posible con esas herramientas. El triángulo de Morley no fue descubierto hasta 1899,

por el matemático anglo-estadounidense Frank Morley, en el Haverford College.

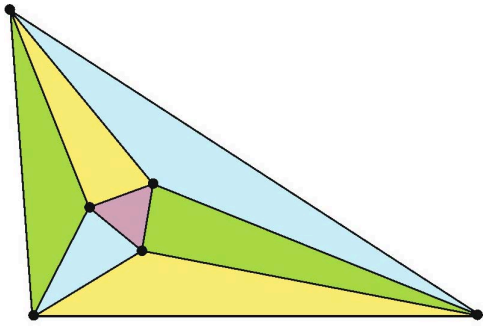


Figura 3-1- El triángulo de Morley[2]

Morley, en realidad, investigaba propiedades complejas de curvas algebraicas más generales, y se topó con este resultado por accidente. No lo publicó de inmediato: se difundió de boca en boca hasta aparecer impreso como problema en The Educational Times en 1908. También se lo mostró a su hijo, que quedó fascinado y años más tarde recordaba:

"Siempre, al menos para el ojo, el teorema se probaba solo, si el dibujo era exacto. Lo que me causaba un fastidio considerable era no poder comprender durante mucho tiempo qué aceptarían como prueba válida aquellos examinadores miopes".

Quizá esta misma sensación de obviedad fue la que disuadió a Morley de publicarlo. Al fin y al cabo, parecía tan simple que debía de haber sido descubierto siglos antes. La primera publicación formal de una demostración llegó en 1913, de la mano de Taylor y Marr, quienes reconocieron el mérito de Morley.

Desde entonces se han encontrado numerosas demostraciones. En mi intuición, el hecho de que los triángulos sumen 180 grados —y que la tercera parte de ese total sea 60, el ángulo propio de un equilátero— parece sugerir la clave. Sin embargo, no he hallado una prueba que realmente enlace esta intuición con el fenómeno. La mayoría de las demostraciones son trigonométricas: resuelven un sistema de ecuaciones, impecables pero poco iluminadoras. Probablemente la más elegante que he visto sea la de John Conway, en el siglo XX, que encaja pequeños triángulos con lados y ángulos adecuados hasta formar cualquier triángulo con su Morley equilátero en el centro.

Y hay más: el teorema se generaliza. Si trisecas no solo los ángulos interiores, sino también los exteriores, aparecen otros triángulos equiláteros ocultos. En total se pueden construir hasta 18 triángulos de Morley distintos, combinando las intersecciones de trisectores interiores y exteriores. De hecho, un aficionado que programaba un ordenador para ilustrar el triángulo central cometió un error y terminó trisecando ángulos exteriores… y aun así obtuvo equiláteros.

Lo más fascinante de todo es que un terreno tan clásico y aparentemente agotado como la geometría euclidiana todavía escondía este secreto, descubierto apenas hace un siglo. ¿Cuántas sorpresas más aguardan en áreas que creemos dominadas? Tal vez algún día un oyente de Mutación matemática sea quien descubra la próxima. Quizá incluso tú.

Cómo no decorar tu baño

Del pódcast Mutación matemática 82

Había un baño de hombres en el edificio donde trabajaba que me sacaba de quicio. Como la mayoría de los baños corporativos, el suelo estaba cubierto de baldosas de varios colores, dispuestas en un patrón simple y repetitivo. Pero en un cubículo en particular, el patrón estaba roto: dos baldosas estaban mal colocadas, justo en el punto donde inevitablemente caía la mirada cuando uno estaba… ocupado. Seguramente alguien reemplazó unas baldosas agrietadas años atrás sin fijarse en el diseño. No sé bien por qué me molestaba tanto esa pequeña violación de la simetría; tal vez por la ironía de que una empresa capaz de hazañas de ingeniería colosales, como fabricar microprocesadores modernos, no pudiera mantener uniforme el enlosado de su baño.

Esto me hizo pensar en los mosaicos en general. Casi todas las aplicaciones reales de baldosas son periódicas, con simetría traslacional: un patrón que se repite indefinidamente, de manera que si tomas una sección pequeña y la desplazas cierta distancia, verás exactamente la misma figura. Pero ¿tienen que ser siempre así? ¿Qué otras opciones existen? Claro, uno puede tomar un conjunto de baldosas cuyas esquinas dividan 360 grados en partes exactas —como cuadrados o hexágonos— y colorearlas al azar para obtener un aspecto irregular sobre un patrón repetitivo. Pero yo me preguntaba por algo distinto: ¿podemos cubrir un suelo infinito con un conjunto de baldosas simples sin que el patrón se repita jamás? Imagina el análogo gráfico de la expansión decimal de π, 3,14159... formada por diez dígitos básicos, pero sin caer nunca en un ciclo repetitivo. Dicho de otra manera: ¿existen conjuntos de baldosas capaces de cubrir el plano aperiódicamente, sin simetría traslacional?

Sorprendentemente, la respuesta es sí. Estos mosaicos fueron descubiertos en 1964 por Robert Berger, matemático de Harvard, quien halló un conjunto de 104 piezas que solo podían cubrir el plano de manera aperiódica, sin repetición traslacional. Pero los mosaicos más

famosos de esta clase llegaron en los años setenta, de la mano de Roger Penrose, que encontró ejemplos con apenas dos piezas capaces de cubrir el plano sin repeticiones. Uno de los más célebres parte de la idea de usar pentágonos. No se puede cubrir un plano únicamente con pentágonos —cada ángulo mide 108 grados, que no divide 360 de forma exacta, de modo que siempre quedarán huecos—, pero Penrose definió un pequeño conjunto de piezas complementarias: una estrella, un rombo y una pieza extraña con forma de barca. Combinándolas con los pentágonos, se logra cubrir el plano en un patrón que jamás repite la simetría traslacional.

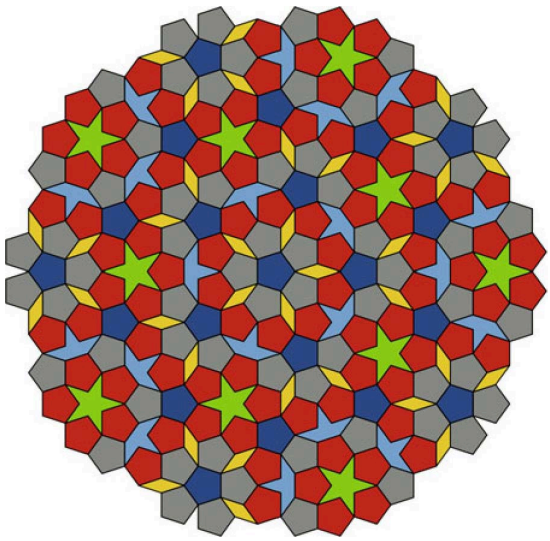


Figura 3-2. Mosaico de Penrose[3]

Los mosaicos de Penrose tienen además propiedades sorprendentes. Si eliges cualquier región finita, esa misma figura aparecerá en infinitos lugares del mosaico, aunque nunca en un patrón regular. Algunos de ellos también exhiben simetría rotacional: al girar la figura cierto ángulo, reaparece el mismo diseño. Puedes encontrar magníficas ilustraciones en la página de la Wikipedia dedicada al tema.

Cuando investigaba este pódcast pensé que la comparación con los azulejos de baño sería solo una broma, porque nadie en su sano juicio pondría mosaicos aperiódicos en un edificio real. Pero para mi sorpresa, descubrí que entre los siglos XIII y XV, en el mundo islámico, algunos arquitectos utilizaron un conjunto de cinco piezas conocidas

como baldosas girih, que bien dispuestas sí podían generar un mosaico aperiódico del plano. El conjunto incluía un decágono, un hexágono alargado, una figura en forma de lazo o mariposa, un rombo y un pentágono. Casi todos los edificios que usaron estas piezas lo hicieron en patrones periódicos, pero al menos uno —el complejo funerario Darb-i-Imam en Irán— presenta un diseño aperiódico que puede extenderse hasta cubrir infinitamente el plano.

¿Fue un descubrimiento fortuito, fruto del ensayo y error? ¿O alcanzaron los matemáticos islámicos avances geométricos que luego se perdieron hasta el siglo XX? Nunca lo sabremos con certeza.

Abejas contra matemáticos

Del pódcast Mutación matemática 152

Volviendo a ejemplos más realistas de baldosas en baños, cuando era más joven pasaba mucho tiempo pensando en por qué vemos tan a menudo mosaicos con forma de hexágonos. Tras quedarme mirándolos un rato, uno puede darse cuenta sin demasiada dificultad de que todo está en los ángulos. La suma de los ángulos alrededor de cualquier punto donde se junten las baldosas debe ser de 360 grados. Así que, si queremos embaldosar usando polígonos regulares, cada uno debe tener ángulos que dividan exactamente 360. Tal vez recuerdes que la fórmula para la suma de los ángulos de un polígono convexo es 180 (n–2), donde n es el número de lados. Esto significa que, si quieres recubrir con polígonos regulares, solo tienes tres opciones: triángulos, cuadrados y hexágonos, gracias a sus ángulos de 60, 90 y 120 grados, respectivamente. Y seamos sinceros: los mosaicos regulares de triángulos o cuadrados resultan bastante aburridos de mirar, con sus líneas rectas formando retículas monótonas. Así que los hexágonos son los claros vencedores.

Por cierto, esto me llevó a preguntarme: ¿por qué las abejas construyen sus colmenas con hexágonos? Supongo que probablemente sea más fácil para la naturaleza evolucionar un patrón regular que uno más complejo, pero debe de haber algo más. Aquí entra en juego otra propiedad fundamental de los polígonos: ¿cómo encerrar la mayor área posible minimizando el perímetro? La mejor respuesta es usar un círculo, pero eso sería hacer trampa, porque preguntamos por polígonos. (Podrías discutir que no es trampa, ya que un círculo es simplemente un polígono con un número infinito de lados, pero eso ya nos mete en filosofía). Si hay que usar un polígono regular con un número finito de lados, cuanto más lados tenga, más área encierra, pues se acerca más al círculo circunscrito. Y si además queremos rellenar un plano sin dejar huecos, solo podemos elegir entre los que permiten mosaicos regulares. Eso deja a los hexágonos como la mejor opción.

Pero no hemos terminado. ¿Detectas el fallo en esta lógica? Piensa

un momento en las suposiciones ocultas. ¿Por qué habrían de estar obligadas las abejas a usar una única forma, y por qué tendrían que hacerlo solo con líneas rectas? El hecho de que los hexágonos sigan siendo la mejor respuesta para dividir el plano en regiones de igual área minimizando la longitud de las líneas utilizadas, incluso permitiendo figuras irregulares y curvas, es lo que se conoce como la conjetura del panal. De hecho, se remonta a la Antigüedad: Pappo de Alejandría ya especulaba sobre ello en el siglo IV d.C. Sorprendentemente, no se demostró hasta la década de 1990, cuando Thomas Hales, de la Universidad de Míchigan, probó que, en efecto, cualquier partición del plano en regiones de igual área tiene un perímetro al menos igual al de una retícula hexagonal regular.

Tampoco debemos olvidar que la forma hexagonal de las colmenas es una simplificación: como casi todo en la vida real, en realidad se trata de una estructura tridimensional. Cada par de capas hexagonales está desplazado un poco respecto de la anterior, y los fondos de las celdillas hexagonales son puntiagudos, formados por tres paneles en forma de rombo. Con esta disposición, las capas logran encajar entre sí; en un artículo de Science News, Ivars Peterson señala que es como si juntaras los fondos de dos cartones de huevos. Y aquí viene otra sorpresa: el matemático húngaro László Fejes Tóth demostró en 1964 que, si las abejas formaran las puntas con dos hexágonos y dos cuadrados, podrían encerrar aún más volumen en relación con la cantidad de cera utilizada. Aquí tenemos un caso en que la evolución no pareció darles a las abejas la respuesta óptima. ¿Podría ser cierto? Bueno, la estructura de Tóth es relativamente compleja, por lo que no resulta tan sencillo que la naturaleza la produzca mediante mutaciones al azar.

Pero espera: no hay que olvidar que los resultados matemáticos viven en un espacio ideal, que no toma en cuenta los detalles físicos, entre ellos el hecho de que las paredes de las celdas no tienen grosor cero. Para comprobar el resultado de Tóth, los científicos Dennis Weaire y Robert Phelan hicieron experimentos con burbujas de detergente, que de manera natural minimizan su superficie en relación con el volumen encerrado, bombeando burbujas entre dos placas de vidrio. Cuando las paredes eran muy delgadas, efectivamente confirmaban el resultado: se formaban capas hexagonales unidas por puntas con la estructura

hexágono + cuadrado propuesta por Tóth. Pero, al aumentar el grosor de las paredes líquidas, lo que se formaba era la estructura de tres rombos que vemos en las colmenas reales. Así que lo más probable es que, teniendo en cuenta el grosor de las paredes, el modelo de Tóth fuera una simplificación excesiva. Una prueba más de que, por muy listos que sean los matemáticos, a veces la naturaleza lo es todavía más.

Un roce con el mal

Del pódcast Mutación matemática 102

Hoy pensé que sería divertido hablar de pentagramas. Ya sabes de qué figura hablo: básicamente dibujas un pentágono, unes todas las diagonales que conectan los vértices, y aparece una bonita estrella. El pentagrama ha tenido un profundo simbolismo en muchas culturas desde la Antigüedad, y en la nuestra suele evocar connotaciones demoníacas. ¿Por qué nos resulta tan fascinante esta forma?

Para empezar, creo que es el dibujo "interesante" más fácil de hacer. Piénsalo: una forma perezosa de garabatear, sobre todo para quienes no tienen dotes artísticas, es dibujar varios puntos y unirlos. Si dibujas 2 o 3 puntos, obtienes una línea o un triángulo. Si dibujas 4 y los unes, obtienes un cuadrilátero con una X dentro, nada emocionante. Pero si dibujas 5 puntos espaciados de manera uniforme y los unes, ¡tienes un pentagrama! Si el espaciado no es uniforme, obtendrás un pentagrama distorsionado, salvo en los casos degenerados en que varios puntos coincidan o estén en línea. Y si lo que quieres es una estrella, el pentagrama es también una figura sencilla: puedes trazar toda la estrella con cinco líneas sin levantar el lápiz, como seguro aprendiste en la escuela.

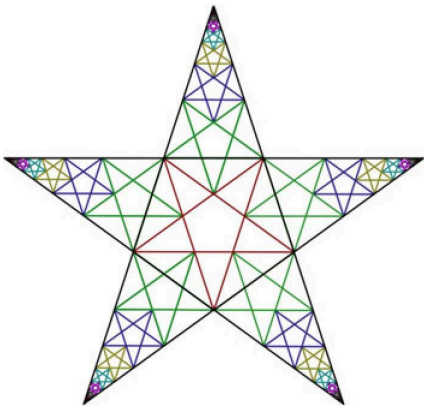


Figura 3-3. Pentagramas y pentágonos inscritos.[4]

Cada intersección entre las diagonales del pentagrama divide la línea en segmentos medibles mediante la proporción áurea (φ), la

célebre constante matemática definida por la relación $a/b = (a+b)/a = (1+\sqrt{5})/2$. Además, las líneas centrales del pentagrama forman en conjunto un pentágono más pequeño, dentro del cual puede inscribirse otro pentagrama. De hecho, si observas con atención, verás que en los "brazos" de la estrella también se puede inscribir una serie infinita y decreciente de pentágonos y pentagramas. Si el pentagrama inicial estaba inscrito en un círculo de radio 1, es decir, tenía circunradio 1, entonces el n-ésimo pentagrama inscrito tendrá circunradio φ^{-n}.

Más allá de estas propiedades, la estrecha asociación del pentagrama con el número 5 es probablemente otra de las razones por las que las culturas humanas lo han considerado fascinante una y otra vez. Ya en el 4000 a. C. se dice que representaba lo "sagrado femenino". Para los antiguos hebreos, simbolizaba los cinco libros de la Torá. Tal vez porque sus cinco puntas pueden ponerse en correspondencia con dos brazos, dos piernas y una cabeza, la punta superior de un pentagrama erguido puede interpretarse como el Espíritu. Según el Diccionario escéptico, un pentagrama invertido puede considerarse especialmente maligno porque relega el espíritu al fondo del montón metafísico. En la antigua Grecia, la secta matemática de Pitágoras utilizaba los pentagramas como símbolo de salud, y los llevaba para reconocerse entre sí.

El pentagrama fue un símbolo cristiano para el emperador Constantino I, aludiendo a las Cinco Llagas de Cristo. En la literatura medieval, el caballero Gawain heredó este uso. Gracias a la posibilidad de trazarlo completo sin levantar el lápiz, el pentagrama también fue conocido como el Nudo Infinito, símbolo de la Verdad y de protección contra los demonios. En el Fausto de Goethe, se usó un pentagrama para contener al demonio Mefistófeles, lo que probablemente favoreció su adopción posterior por parte de los satanistas. Como consecuencia, muchos cristianos consideran hoy al pentagrama en general como un signo demoníaco, sin importar su orientación. Para los wiccanos y los japoneses, en cambio, el pentagrama no tiene connotaciones malignas: simplemente simboliza los cinco elementos místicos.

Quizá el comentario más divertido que encontré en mis lecturas es el más obvio. Como seguro has visto en miles de caricaturas y dibujos

infantiles, la estrella de cinco puntas parece ser un símbolo casi universal para representar a las estrellas del cielo. Pero, como señala el Diccionario escéptico, ninguna estrella real se ve remotamente así, ni a simple vista ni a través de un telescopio. ¿Raro, no?

Más retorcido de lo que creías

Del pódcast Mutación matemática 168

Si eres lo bastante friki como para estar leyendo este libro, probablemente ya conozcas lo básico de la cinta de Moebius: tomas una tira larga de papel y pegas un extremo corto con el otro, después de girarla 180 grados. Obtienes así un objeto que tiene un solo lado y un solo borde. Si empiezas a trazar una línea por el centro, descubrirás que, cuando vuelves al punto de partida, tu línea ha recorrido ambos lados de la tira. Y si comienzas a remarcar un borde, verás igualmente que al regresar al inicio has recorrido todos los bordes.

La cinta de Moebius debe su nombre a August Ferdinand Moebius, un matemático y astrónomo alemán del siglo XIX que había estudiado bajo la tutela de Gauss. Se le consideraba muy talentoso en su juventud y llegó a ser director del departamento de Astronomía en la Universidad de Leipzig en 1816. Mi anécdota favorita sobre él es que, a pesar de ser jefe de departamento, no lo promovieron rápidamente a profesor titular porque no era buen conferenciante, y no conseguía atraer estudiantes dispuestos a pagar por escucharlo. ¡Ojalá las universidades modernas aplicaran criterios similares, en vez de torturar a los alumnos de grado con profesores ascendidos solo por sus publicaciones! Moebius acabó haciendo contribuciones fundamentales a la astronomía, la geometría analítica y la topología. Irónicamente, su trabajo sobre la cinta, que lo convertiría en un nombre conocido, solo se publicó póstumamente en unas memorias, y en realidad la cinta había sido descubierta antes (aunque no descrita con tanto detalle) por otro matemático llamado Johann Listing.

Las cintas de Moebius son divertidas de manipular. Para unas cuantas sorpresas, prueba a cortarla por la mitad siguiendo su centro, o a cortar una línea paralela a un tercio del borde. Probablemente los resultados no coincidan con tu intuición: en el primer caso obtendrás un bucle largo pero no de Moebius; en el segundo, un bucle de Moebius enlazado con otro normal. En la web puedes encontrar fórmulas generales sobre lo que resulta de estos cortes paralelos. Un

experimento aún más extraño consiste en usar una cinta de Moebius como soporte de una de esas cajas de música que funcionan con cintas perforadas: el resultado será que la caja toca una vez la canción normal, y la siguiente vez la toca con todas las notas invertidas. Un usuario de YouTube incluso publicó un vídeo mostrando este truco.

Pero más allá de la curiosidad, quizá te sorprenda saber que las cintas de Moebius tienen aplicaciones prácticas. Y pensándolo bien, no resulta tan raro: muchos elementos de la tecnología moderna de los últimos cien años han usado cintas o correas, y añadir un giro de Moebius permite que ambos lados de una tira en rotación continua se aprovechen sin tener que retirarla y darle la vuelta. En el caso de la cinta de máquina de escribir, permite usar la tinta de ambos lados antes de desecharla. En el caso de una cinta magnética de computadora o de audio, de nuevo permite grabar por ambas caras. Puede que estas últimas no tengan mucho sentido si no eres un anciano de 46 años como yo, pero puedes leer sobre ellas en los libros de historia. Eso sí: las fábricas aún necesitan cintas transportadoras, al menos hasta que subamos nuestra conciencia a computadoras y dejemos de interactuar con objetos físicos. En el caso de una cinta transportadora, un diseño con Moebius asegura un desgaste uniforme en ambas caras, duplicando su vida útil. Lo mismo ocurre con las cintas abrasivas y de lijado. Y en una aplicación algo más esotérica, algunos teóricos de la música han descubierto que, cuando intentan describir relaciones entre acordes en una superficie bidimensional, el resultado se puede mapear directamente en una cinta de Moebius.

Y no somos los únicos en aprovecharlas: las cintas de Moebius también aparecen en la naturaleza. Al analizar un remedio popular africano que parecía beneficioso para mujeres embarazadas, los biólogos descubrieron que un componente clave era una proteína llamada Kalata B1. Se trata de una proteína cíclica, compuesta por 29 aminoácidos conectados en un bucle… con un solo giro medio, formando una estructura tipo Moebius. Esto la vuelve especialmente estable, capaz de resistir temperaturas de ebullición, y muy difícil de atacar para las enzimas. Experimentos han demostrado que esta proteína también tiene propiedades antimicrobianas e insecticidas. Se sospecha que estructuras de este tipo tendrán muchas aplicaciones

farmacéuticas y agrícolas.

Por último, no debemos olvidar los usos de la cinta de Moebius en las artes. Puedes verla en numerosas pinturas, especialmente en las de M.C. Escher, y por supuesto un dibujo de la cinta es la base del símbolo triangular verde de reciclaje, visible en tantos lugares políticamente correctos. También ha sido un tema recurrente en relatos de ciencia ficción: un sitio web especializado cuenta 31 historias conocidas que incluyen cintas de Moebius, entre ellas obras de Arthur C. Clarke, John Barth, Martin Gardner y Lewis Carroll. Concluiré esta sección con una obra más oscura, un poema en internet de alguien llamado (o que firmaba como) Eleanor Ninestein:

El hijo del topólogo era un lío,
hasta que vistió un pañal de Moebius.
La suciedad de dentro
se hallaba también fuera,
y cualquiera podía limpiarlo con brío.

Aplasta esos dados

Del pódcast Mutación matemática 18

Hace poco estaba jugando mi partida semanal de Dungeons & Dragons (“D&D”), y me puse a pensar en los dados que usamos en el juego. Los principales dados de D&D corresponden a los cinco poliedros regulares, también llamados sólidos platónicos. Son figuras sólidas con la propiedad de que todas sus caras son polígonos regulares, y todos sus vértices son congruentes entre sí. Estos cinco son: el tetraedro, con 4 caras triangulares; el cubo, con 6 caras cuadradas; el octaedro, con 8 caras triangulares; el dodecaedro, con 12 caras pentagonales; y el icosaedro, con 20 caras triangulares.



Figura 3-4. Los cinco dados poliédricos regulares

Lo que siempre me ha parecido curioso es que existan exactamente cinco de estos poliedros regulares. ¿Por qué no hay más? ¿Por qué no existe algún extraño poliedro de 8.763 caras en forma de nonágonos, que nadie se haya molestado en construir todavía? Sin duda, ese dado añadiría emoción a nuestras partidas de D&D.

Hace años, en una clase de matemáticas, aprendí una demostración algebraica estándar de que solo existen esos cinco sólidos platónicos, basada en ecuaciones que describen las relaciones entre el número de vértices, aristas y caras. Pero nunca tuve una verdadera intuición de por qué debía ser así. Por eso me alegró encontrar, navegando por la red, un argumento geométrico sencillo que explica la unicidad de estos cinco

sólidos.

Para entenderlo, basta con observar un vértice (esquina) de uno de estos sólidos, un punto donde se encuentran tres o más de sus caras poligonales. Imagina que, frustrado por una mala tirada, estampas ese vértice contra el suelo, de modo que las caras se separan entre sí pero permanecen unidas en el punto original. Mira entonces el punto en el suelo donde se apoya ese vértice. A su alrededor están los ángulos de todas las caras adyacentes, formando un círculo. Como esos ángulos encajan alrededor de un único punto, su suma debe ser menor que 360 grados. Menor estrictamente, porque si fueran exactamente 360, nunca podrían haberse "plegado" hacia arriba para formar un sólido. Esta es la observación clave: la unicidad de los cinco sólidos proviene directamente de esta restricción, que la suma de los ángulos en un vértice debe ser inferior a 360.

¿Por qué? Pues porque al menos tres caras deben reunirse en un vértice, y hemos definido que todas las caras han de ser idénticas. Así que sabemos que cada cara debe tener ángulos menores de 120 grados. Pero cada ángulo de un hexágono mide 120°, y en los polígonos regulares los ángulos crecen con el número de lados; por tanto, las caras de un poliedro regular solo pueden ser pentágonos, cuadrados o triángulos. En el caso de pentágonos o cuadrados, solo pueden juntarse tres en un vértice sin llegar al límite de 360 grados, lo que da un único sólido platónico con caras pentagonales (el dodecaedro) y otro con caras cuadradas (el cubo). En el caso de triángulos, cada ángulo mide 60 grados, así que pueden juntarse tres, cuatro o cinco en un vértice, formando nuestros tres sólidos restantes: tetraedro, octaedro e icosaedro. Cuantas menos caras se junten en un vértice, más agudo es el ángulo resultante al "plegarlas" para formar el sólido.

Ahora bien, quienes sean jugadores veteranos quizá estén confundidos porque han visto otros dados en las tiendas, como el de 10 caras, 30 caras o incluso 100 caras. Pero ninguno de esos es un poliedro regular: o bien no todos los ángulos son iguales, o bien las caras no son polígonos regulares. ¿Y por qué insistimos en esa restricción? Pues porque eso hace que las matemáticas sean más interesantes. ¿Vale como respuesta? Gracias a nuestra observación sobre los ángulos de los vértices, sabemos que, mientras queramos que los dados sean poliedros

regulares, estos cinco son los únicos que existirán jamás.

Dados locos

Del pódcast Mutación matemática 155

En la sección anterior hablamos de los dados poliédricos regulares. Están formados por los cinco sólidos convexos en los que todas las caras son polígonos regulares e idénticos, y todos los vértices son equivalentes. Son el tetraedro de 4 caras, el cubo de 6, el octaedro de 8, el dodecaedro de 12 y el icosaedro de 20. ¿Por qué se prefieren estos dados para los juegos, en lugar de formas más irregulares? La razón es clara: su gran simetría hace que todas las caras sean equivalentes de algún modo, lo que los convierte naturalmente en dados justos. Pero, ¿es necesario ser tan estrictos para crear dados imparciales, es decir, con igual probabilidad de caer en cada cara? Pensándolo bien, la exigencia de que sean sólidos platónicos es demasiado rígida. Basta con un criterio más simple: que el dado sea isoédrico. Esto significa que sea un poliedro convexo con todas las caras idénticas, y que cada cara tenga la misma relación con el centro de gravedad del sólido. En otras palabras, podemos relajar la condición de que todas las caras sean polígonos regulares y que todos los vértices sean idénticos.

¿Y qué ganamos con eso? Pues mucho, en realidad. En internet se puede encontrar una página de Ed Pegg, que muestra espectaculares representaciones 3D de dados con 24, 30, 48, 60 o incluso 120 caras. Más útil aún: explica familias infinitas de isoedros con 2n caras, para cualquier n mayor o igual que 3. Los más sencillos son fáciles de visualizar: imagina un cono, pero con una base en forma de n-ágono regular en lugar de un círculo. Si pones dos de estos conos unidos por la base, con las esquinas tocándose, voilà: tienes un dado justo con 2n caras. Y observa que puedes usar fácilmente un dado de 2n caras para generar números aleatorios del 1 al n, simplemente numerando las caras hasta n dos veces en lugar de dar a cada cara un número distinto. Así que, sea cual sea el juego de rol disparatado que inventes, puedes disponer de los dados adecuados para generar números aleatorios en cualquier rango.

Pero, como en toda regla matemática básica, siempre hay algún

bromista que encuentra la manera de violarla. Así aparecen dados con números raros de caras, como 5 o 7, fabricados con otros trucos. Por ejemplo, existe un dado de 7 caras que se vende a jugadores: imagina un cilindro erguido como una lata de refresco, pero con pentágonos en vez de círculos en sus bases superior e inferior. ¿Lo ves? Eso implica que dos caras son pentágonos y las otras cinco son rectángulos. ¿Puede ser realmente un dado justo? Si se tiene mucho cuidado con el área de cada cara y la distribución del peso, se puede ajustar para que funcione. Es además peculiar porque, si cae sobre la base, lees el valor en la cara como en un dado normal; pero si cae sobre un rectángulo, lo que queda arriba es un borde, y los números deben marcarse en los bordes.

Hacer un dado justo con una forma extraña es más difícil de lo que parece. Un cálculo ingenuo sería comparar las áreas de las caras, asumiendo que si todas son iguales, el dado es justo. Pero basta un experimento mental para refutarlo: imagina que en ese dado de 7 caras las bases pentagonales no son planas, sino cortadas en ángulo. Entonces, si el dado cae sobre ellas, se inclina y rueda, de modo que la probabilidad de que queden hacia abajo es prácticamente 0, por mucha área que tengan. En estos casos, hay que considerar la energía necesaria para que el dado ruede de una cara a otra, y el impulso probable de la tirada, para determinar no solo si puede caer en una cara, sino si puede quedarse en ella. Pegg desarrolló un modelo llamado Modelo de estado energético para formalizar este análisis, disponible en detalle en su web.

Hay otro detalle que influye en la imparcialidad de los dados. En la mayoría de los dados de calidad, los números se marcan con puntitos perforados. Pero al retirar ese mínimo de material, el peso del dado deja de ser perfectamente simétrico: la cara con un solo punto es más pesada que la del seis. Esto hace que el seis sea ligeramente más probable que el uno. ¿De verdad es relevante? Según cifras que circulan en internet, de cada 10.000 tiradas, cabría esperar unas 1.679 veces el seis y solo 1.654 el uno. Quizá no sea suficiente para alterar un juego casual, pero sí preocupa a los casinos: ellos rellenan los puntos con pintura cuyo peso coincide exactamente con el plástico faltante, eliminando el sesgo.

En resumen: aunque requiere algo de esfuerzo, es posible fabricar

dados justos con prácticamente cualquier número de caras. Quién sabe, quizá algún día tengas la suficiente inventiva para añadir uno más a los cientos de tipos de dados registrados en la oficina de patentes de EE.UU.

Ruedas que no son redondas

Del pódcast Mutación matemática 209

La mayoría de nosotros estamos bastante familiarizados con la idea de que las ruedas suelen ser redondas. Pero, ¿tienen que serlo necesariamente? ¿Qué propiedades hacen útil a una rueda circular? Sí, quizá pienses que una década de hacer pódcast de matemáticas me ha vuelto definitivamente loco, al cuestionar algo tan obvio. Pero los frikis de las matemáticas somos famosos por exigir demostraciones de lo evidente… y este es un caso en el que la intuición común puede engañarnos.

Claro que, por muchas razones, las formas circulares tienden a ser las mejores ruedas. Pero en ciertos casos existe una clase más general de figuras que pueden sustituir a la forma circular, con aplicaciones prácticas muy interesantes. Estas son las llamadas curvas de ancho constante.

Para simplificar la explicación y evitar complicaciones con ejes, pensemos en simples rodillos. Supongamos que quieres deslizar suavemente una gran plancha de madera sobre unos troncos. Si los troncos tienen sección circular, es obvio que la plancha podrá rodar sin altibajos. ¿Cuál es la propiedad que lo permite? La razón es que el círculo es una curva de ancho constante: si colocas dos líneas paralelas, una arriba y otra abajo, tangentes al círculo, la distancia entre ellas es siempre la misma, igual al diámetro. Pero lo sorprendente es que, como descubrió Euler en el siglo XVIII, hay muchas otras curvas de ancho constante que también permiten un rodado suave.

La más famosa de estas curvas no circulares es el triángulo de Reuleaux, una especie de triángulo equilátero con bordes redondeados. Para construir uno, se comienza con un triángulo equilátero. Luego, para cada vértice, se reemplaza el lado opuesto por el arco de un círculo cuyo centro está en ese vértice, y cuyo radio coincide con la longitud del lado del triángulo.

Si lo piensas un momento, verás que esta curva tiene diámetro constante: si una plancha rueda por encima, en cada instante uno de los vértices estará en contacto con el suelo o con la plancha, y el lado

opuesto estará tocando un arco circular. Y como ese arco está definido como el conjunto de puntos equidistantes de su centro (el vértice opuesto), la distancia entre plancha y suelo será siempre la misma, igual al radio del círculo. Así, troncos con sección en triángulo de Reuleaux permiten rodar la plancha tan suavemente como si fueran circulares.

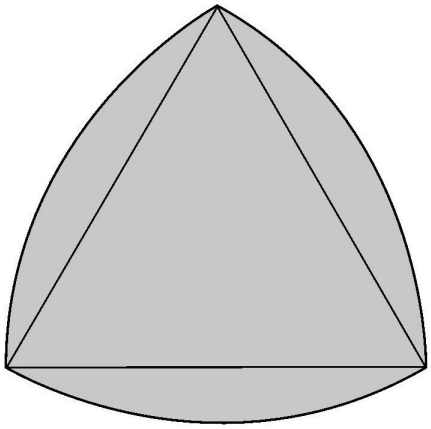


Figura 3-5. Triángulo de Reuleaux

Como puedes intuir por el método de construcción, el triángulo de Reuleaux es solo un representante de una gran familia de curvas de ancho constante. Basta con tomar un polígono regular de número impar de lados y reemplazar cada lado opuesto a un vértice por el arco de un círculo centrado en ese vértice. Existen además muchas otras curvas de este tipo, construidas con métodos más complejos, que puedes investigar en internet si te pica la curiosidad.

El descubrimiento de esta amplia clase de formas ha llevado a aplicaciones prácticas muy ingeniosas. Franz Reuleaux, el ingeniero del siglo XIX que dio nombre al triángulo (pese a que Euler lo conocía antes), se hizo famoso investigando usos para convertir movimientos circulares en otros tipos de movimiento. Más tarde, esto condujo a mecanismos tan variados como proyectores de cine o motores de automóviles. Como la rotación de un triángulo de Reuleaux traza una figura casi cuadrada, también se diseñó con él una broca especial que permite a los carpinteros perforar agujeros cuadrados. Basándose en otras curvas de ancho constante, se han creado variantes que permiten perforar agujeros en forma de pentágono, hexágono u octágono. Este

tipo de formas también se ha usado en lápices, con la idea de que su diámetro constante pero no circular ofrece un agarre cómodo y reduce la probabilidad de que rueden solos por la mesa. Y en varios países, monedas con estas formas no circulares de ancho constante se han empleado para facilitar el diseño de las máquinas expendedoras.

Pero quizá la utilidad más valiosa del triángulo de Reuleaux y sus parientes sea la de servir como contraejemplos no circulares, que nos obligan a cuestionar supuestos básicos de la geometría. Según algunas fuentes, ingenieros que trabajaban en el malogrado transbordador espacial Challenger trataron de verificar la forma cilíndrica de ciertos componentes midiendo su anchura en distintos puntos, sin saber de la existencia de estas curvas no circulares de diámetro constante. Una lástima que no tuvieran pódcast de matemáticas en aquel entonces (aunque en realidad podrían haber leído el ensayo clásico de Martin Gardner sobre el tema). Si las piezas no eran circulares, distintas tensiones habrían afectado al material de forma desigual, contribuyendo tal vez a la catástrofe final.

Así que recuerda tener presentes estas curvas no circulares de ancho constante, la próxima vez que diseñes un aparato mecánico, acuñes moneda para tu país… o construyas un transbordador espacial.

El futuro que nunca llegó

Del pódcast Mutación matemática 73

Si has ido al Epcot Center de Disney, o has visto aquellas visiones futuristas creadas en los años 50 y 60, seguramente habrás contemplado una cúpula geodésica. Son esas enormes cúpulas compuestas por triángulos, que hace medio siglo muchos pensaban que serían el futuro de la arquitectura. Siguen viéndose espectaculares, pero nunca llegaron a popularizarse del todo, y la mayoría seguimos viviendo en casas rectangulares. ¿Qué son exactamente estas cúpulas geodésicas y qué las hace tan interesantes?

En general, una cúpula es un diseño eficiente en cuanto a la relación entre volumen interior y superficie exterior: en tres dimensiones, las figuras esféricas encierran el mayor volumen con la menor superficie. Una cúpula geodésica se construye con una red de elementos lineales que forman porciones de círculos máximos sobre una esfera, donde un "círculo máximo" es aquel, como el ecuador, cuyo diámetro coincide con el de la esfera. La intersección de estos círculos genera una gran cantidad de triángulos. La propiedad esencial de estas cúpulas es que los círculos máximos distribuyen la tensión a lo largo de toda la estructura, lo que las hace naturalmente muy resistentes. Sin embargo, debido a la complejidad de la red de intersecciones, un defecto menor puede transferir tensiones de maneras muy extrañas: la Wikipedia menciona un caso en que una quitanieves chocó contra una de estas construcciones en Princeton (Nueva Jersey) y el daño apareció en el lado opuesto. Pero, bien construidas, las cúpulas han demostrado resistir terremotos, huracanes y otros desastres. Y como su estructura auto-reforzada es intrínsecamente sólida, si se hacen bien, incluso pueden edificarse con materiales muy ligeros; hay sitios web que muestran cómo construir una con pajitas y caramelos de goma.

Lo más probable, sin embargo, es que hayas oído hablar de las cúpulas geodésicas gracias a los buckyballs, esas moléculas de carbono de 60 átomos descubiertas en las últimas décadas que tienen formas semejantes a estas cúpulas. Su extrema estabilidad estructural abre un

abanico de aplicaciones potenciales, como usarlas para contener y transportar otras moléculas más simples, entre ellas hidrógeno densamente empaquetado. Los buckyballs reciben su nombre en honor al arquitecto Buckminster Fuller, considerado el inventor de las cúpulas geodésicas. Ciertamente él las patentó y popularizó, aunque hay cierta disputa sobre si algunos diseños alemanes de los años 20 se le adelantaron técnicamente.

Fuller llevó una vida exitosa pero muy peculiar. Mientras ganaba fama internacional por sus exóticas aunque resistentes construcciones en forma de cúpula, atribuía un significado mucho más universal a sus observaciones geométricas. Entre ellas estaban los principios de empaquetamiento de esferas, tetraedros y octaedros, que llamó estructuras de tensegridad, además de su entendimiento de las cúpulas geodésicas. No se consideraba solo arquitecto, sino también filósofo, y creía que comprender la naturaleza interdependiente de estas estructuras geométricas conduciría de manera natural al ecologismo, a un gobierno universal y a la paz mundial. A esta filosofía la llamó Sinergética, definida como "la integración de geometría y filosofía en un único sistema conceptual que proporcione un lenguaje común y dé cuenta tanto de lo físico como de lo metafísico".

Intenté leer su largo y denso libro sobre la Sinergética, donde describe en detalle esta filosofía, pero no logré llegar al final. Como indica la Wikipedia, Fuller solía escribir frases larguísimas y palabras compuestas inusuales (omni-informada, intertransformativa, omni-interacomodativa, omni-autorregenerativa [omniwell-informed, intertransformative, omni-interaccommodative, omniself-regenerative]), además de acuñar términos propios. También consideraba tan significativos sus pensamientos y acciones que se empeñó en documentar cada quince minutos de su vida entre 1915 y 1983, en una obra titulada Dymaxion Chronofiles, que incluía desde entradas de diario hasta recibos de la tintorería. Pero que se desviara hacia lo filosófico no debe restar mérito a sus logros arquitectónicos.

Entonces, si estas cúpulas son tan buenas, ¿por qué no vivimos todos en una en pleno siglo XXI? Para empezar, tienen desventajas evidentes: las paredes inclinadas implican muchas zonas con poca altura útil, que se convierten en espacio desperdiciado. Además, la

mayoría de materiales de construcción vienen en forma rectangular, por lo que levantar una cúpula requiere mucho desperdicio de material. Las leyes y reglamentos sobre salidas de emergencia, ventanas o cableado eléctrico tampoco se adaptan a estas estructuras, lo que incrementa los costes. A esto se suman los problemas prácticos con el mobiliario convencional: ¿dónde colocas un sofá en una cúpula sin dejar un hueco desaprovechado detrás? Nada de esto impidió a Fuller vivir él mismo en una de sus cúpulas, claro está, pero los demás mortales que no somos tan ricos tenemos que considerar esos problemas prácticos.

CAPÍTULO 4

Dimensiones más profundas

Todavía recuerdo la primera vez que leí la novela clásica del siglo XIX Planilandia (Flatland), de Edwin Abbott, allá por sexto grado. Planilandia cuenta la historia de A. Cuadrado, una criatura con forma de cuadrado que vive en un mundo contenido enteramente en un plano bidimensional: puede moverse hacia adelante, hacia atrás, a izquierda o a derecha, pero no tiene la menor idea de que las direcciones arriba y abajo siquiera existen. Todo lo que puede ver son otros objetos en su plano, que desde su punto de vista reducido a dos dimensiones no son más que líneas.

En un momento, es visitado por una esfera proveniente de la tercera dimensión, y queda maravillado con sus "trucos", como la capacidad de hacerse más grande o más pequeña según qué sección transversal esté intersectando el plano de Planilandia. Al final, el cuadrado llega a aceptar que, en efecto, existen dimensiones más allá de las dos a las que está acostumbrado.

Mientras revisaba mi lista de episodios de Mutación matemática para armar este libro, me sorprendió darme cuenta de que en realidad no tenía ninguno centrado directamente en Planilandia. Supongo que, en el fondo, daba por sentado que cualquiera con suficiente interés en las matemáticas como para escuchar mi pódcast ya habría leído ese libro. Si no es tu caso, te lo recomiendo fervientemente. Mi descripción en el párrafo anterior no le hace verdadera justicia, aunque basta para que puedas comprender las discusiones relacionadas en este capítulo. Vale aclarar que Planilandia ya es lo bastante antiguo como para estar libre de derechos de autor, así que puedes encontrar el texto completo gratis en línea, en caso de que la compra de este libro haya agotado tu presupuesto de lectura.

Leer Planilandia fue para mí una experiencia reveladora. ¿Podría ser que nosotros mismos seamos como los planilandeses, incapaces de detectar las dimensiones superiores del universo simplemente por la

desgracia de haber nacido confinados en un hiperplano tridimensional? ¿Cuántos descubrimientos asombrosos estarán ahí afuera, quizá a escasos centímetros de nosotros, y aun así somos incapaces de percibirlos? ¿Cómo cambiaría nuestra vida si lográramos encontrar una manera de interactuar con esas dimensiones superiores? Desde entonces, he devorado todos los libros, artículos e historias que encontré sobre este tema alucinante. Aquí comparto algunas de mis ideas y observaciones favoritas sobre la posible existencia de dimensiones más altas y las extrañas propiedades que podrían tener.

Haciendo real a Planilandia

De los pódcast Mutación matemática 4, 8, 74 y 175

El Planilandia original era simplemente un plano infinito, donde los habitantes podían desplazarse a voluntad. Aunque la novela era brillante, su autor, Edwin Abbott, no se preocupó demasiado por fuentes de energía en dos dimensiones, ni por la ecología, la plausibilidad biológica o cualquier otra consideración mundana que hace posible la vida en nuestro universo. Nada de eso era necesario para expresar su metáfora básica: criaturas bidimensionales ignorantes de la tercera dimensión, como un espejo de cómo nosotros mismos vemos nuestro mundo.

Pero aun así, habría sido interesante que Planilandia resultara un poco más realista. En los años posteriores a la publicación de Abbott, numerosos autores intentaron extender la idea hacia modelos un poco más "realistas" —si es que puede llamarse así—. Por ejemplo, sería más análogo a nuestra experiencia si las criaturas planas vivieran en el borde de un disco en el universo, del mismo modo en que nosotros vivimos sobre la superficie de nuestro planeta. Tres autores en particular produjeron obras notables en este género: C. H. Hinton, Dionys Burger y A.K. Dewdney.

Hinton, contemporáneo de Abbott, escribió sobre la cuarta dimensión poco después de Planilandia. Menos famoso que Abbott —probablemente por no ser tan talentoso como narrador—, ideó su propio mundo bidimensional. En el mundo de Astria, las criaturas viven

en un planeta circular sobre la superficie de una gran burbuja tridimensional. En muchos aspectos, esto anticipaba la posterior descripción einsteiniana del espacio-tiempo, en la que nuestro universo "tridimensional" estaría curvado en una cuarta dimensión. Hinton además se esforzó por resolver las dificultades prácticas de vivir en un mundo así.

Por ejemplo, describió cómo se podrían crear vehículos con ruedas. No puede haber un eje atravesando una rueda, ya que el simple hecho de que sea circular impediría su movimiento con cualquier barra conectada. En cambio, el carro debe apoyarse en rodillos libres. Alguien atrás tiene que ir levantando los rodillos ya usados y pasarlos adelante. Y peor aún: si quieres arrastrar el carro con una cuerda y algún tipo de caballo bidimensional, hay que desenganchar la cuerda cada vez que coloques un rodillo nuevo. Piensa en ello: en dos dimensiones, una simple línea de cuerda es tan infranqueable como lo sería para nosotros un muro sólido.

Al igual que Abbott, Hinton usó sus criaturas geométricas como vehículo de comentario social. En lugar de los polígonos masculinos y las líneas femeninas de Planilandia, en Astria todos son triángulos rectángulos: un cateto paralelo al suelo, el otro perpendicular. Cada persona tiene un lado recto, con el que se comunica, y un lado puntiagudo, con el que se defiende. Los hombres apuntan con su lado agudo hacia la izquierda, las mujeres hacia la derecha. Así, en una ilustración bastante elocuente de los "valores familiares", hombre y mujer encajan naturalmente: pueden situarse juntos, espalda contra espalda, y protegerse del mundo con sus extremos puntiagudos. Dos hombres o dos mujeres no pueden unirse de la misma manera, lo cual —sugiere el narrador con ironía— haría que este mundo fuera declarado ilegal por la Corte Suprema de California. Pero al mismo tiempo, desde nuestra perspectiva superior, queda claro que hombres y mujeres en Astria son en realidad iguales, y que en la tercera dimensión bastaría un giro para transformar uno en el otro.

Hinton también estaba fascinado por la cuarta dimensión como explicación posible de fenómenos místicos o psíquicos. Si se puede viajar o ejercer fuerza en la cuarta dimensión, todo tipo de acciones serían posibles, aunque parezcan violar las leyes de nuestro mundo

tridimensional. En una de sus historias tardías, los astrianos descubren que la órbita de su planeta se está degradando y que su disco acabará cayendo en el sol. Para salvarse, se dan cuenta de que sus cuerpos se extienden en la tercera dimensión, donde reside lo que ellos llaman el "alma". Concentrándose, logran invocar un poder innato de esa dimensión. Difundiendo un despertar religioso sobre este poder, y trabajando juntos, consiguen usar sus facultades tridimensionales para salvar su planeta.

Unos cuantos decenios después, en los años 60, Dionys Burger escribió su propia secuela no oficial: Esferalandia (Sphereland). En ella amplió la historia hacia una alegoría del espacio-tiempo curvado de Einstein, introduciendo al lector en la idea de que la cuarta dimensión no solo existe, sino que además nuestro espacio está curvado en esa dirección, tal como creen los físicos. Descubrimos que los planilandeses no viven en un plano infinito, sino en el borde de un gran planeta circular, con otros planetas similares flotando en su espacio bidimensional.

Una de las secciones más divertidas relata la Era de las Exploraciones de Planilandia, cuando varias expediciones descubren territorios lejanos. Finalmente, exploradores que partieron hacia el este y hacia el oeste se encuentran cara a cara, demostrando que su mundo es un disco. En los "tiempos modernos" de la narración, un astrónomo comienza a medir triángulos enormes y descubre que algunos tienen una suma de ángulos mayor de 180 grados. Sus colegas lo toman por un chiflado, pues "todo el mundo sabe" que la geometría demuestra que los ángulos de un triángulo suman siempre 180. Convencido de la precisión de sus mediciones, el astrónomo trabaja con un hexágono —nieto del Cuadrado original—, y juntos descubren la verdad: su universo está curvado en la tercera dimensión. De la misma manera que nuestro universo está curvado en un espacio de cuatro dimensiones, Planilandia está curvada en un espacio tridimensional, asentada sobre la superficie de una esfera.

Probablemente el intento más realista de describir un mundo bidimensional sea El Planiverso (The Planiverse), de A.K. Dewdney, publicado en 1984. Además de continuar con la idea de planetas disco flotando en un universo de astros semejantes, Dewdney descartó el

concepto un tanto ridículo de seres vivos como polígonos y se esforzó en diseñar animales plausibles en dos dimensiones.

Tuvo que lidiar con problemas básicos inevitables. Por ejemplo: ¿cómo serían los sistemas digestivo o circulatorio? En nuestro mundo, son básicamente un conjunto de tubos que recorren el cuerpo. Pero en dos dimensiones, cualquier tubo —un intestino o un vaso sanguíneo— partiría en dos al organismo. ¿Cómo podrían existir seres vivos así? La solución de Dewdney fue el órgano cremallera: dos grupos de células que se enganchan y desenganchan como un cierre, manteniendo unido el cuerpo mientras los fluidos circulan. En cada instante, una gran parte del cuerpo está cohesionada, evitando que la criatura se desarme.

Otro problema abordado por Dewdney: ¿cómo construir una casa en dos dimensiones? En un mundo plano, no puedes bordear una estructura: tendrías que trepar sobre ella. No me gustaría que cualquier transeúnte de Portland trepara por mi techo a todas horas. Dewdney imaginó entonces casas excavadas en el suelo, con puertas que debían permanecer abiertas salvo en los momentos en que alguien necesitaba pasar por encima. Si llueve, la puerta debía cerrarse de manera absolutamente hermética, o la vivienda se convertía en piscina. Y claro, eso significaba que la casa debía contener suficiente aire para sobrevivir hasta que acabase el aguacero.

En conclusión: si disfrutaste de Planilandia y quieres explorar a fondo las complejidades y contradicciones inherentes de un mundo bidimensional, Hinton, Burger y Dewdney son un excelente punto de partida. Hinton y Burger avanzan un poco más que Abbott, aunque siguen enfocados principalmente en la metáfora y la filosofía. Dewdney, en cambio, aporta un realismo propio de la ciencia ficción más rigurosa. De un modo u otro, si Planilandia te fascinó, los tres merecen estar en tu biblioteca.

¿Está condenado Planilandia?

Del pódcast Mutación matemática 53

Adentrémonos un poco más en la "física realista" de un mundo bidimensional, tal como la exploró A. K. Dewdney en El Planiverso. ¿Qué efecto tendría la falta de dimensiones sobre cosas como la química y la física? ¿De qué manera se verían alteradas, aunque sea sutilmente, las leyes que conocemos?

Un ejemplo que señala Dewdney es la conocida ley del inverso del cuadrado, que regula intensidad de fuerzas como la gravedad en función de la distancia. Quizá recuerdes de las clases de física en el colegio que, en nuestro universo tridimensional, si multiplicas la distancia entre dos objetos por un factor n, la gravedad entre ellos disminuye en un factor de n^2. Probablemente, como yo, aceptaste ese hecho, lo usaste en las fórmulas y seguiste adelante. Pero ¿hay alguna razón para que funcione así? ¿Por qué inverso del cuadrado y no inverso del cubo, o simplemente proporcionalidad inversa? Lo cierto es que hay una explicación muy razonable, íntimamente ligada a la dimensionalidad de nuestro universo.

Imagina un punto de luz en el interior de una gran pelota de playa. El área que ilumina corresponde a la superficie interna de la pelota, proporcional al cuadrado del radio. Ahora supongamos que el radio de la pelota se triplica. La superficie interna aumenta por un factor de nueve, es decir, tres al cuadrado. Pero la fuente de luz es la misma: la misma cantidad de energía debe repartirse ahora en una superficie nueve veces mayor. Dicho de otro modo, la ley del inverso del cuadrado surge porque, a medida que nos alejamos, la energía se reparte sobre un área que crece con el cuadrado de la distancia.

¿Y qué ocurre en dos dimensiones? Nuestro "balón de playa" bidimensional sería un círculo, y la luz solo tendría que iluminar la circunferencia, cuya longitud es directamente proporcional al radio, no a su cuadrado. Así, en lugar de una ley del inverso del cuadrado, en un universo bidimensional tendríamos una simple ley del inverso. Esto significa que las fuerzas y la energía se disipan mucho más lentamente

con la distancia. Pero ¿tendrá esta "ley del inverso simple" consecuencias más drásticas?

Un hecho fundamental en física es que la integral —o suma continua— de la función inversa del cuadrado, desde 1 hasta el infinito, converge: los valores disminuyen tan rápido que el total de energía necesaria para separar dos objetos hasta una distancia infinita es finito. Por eso existe el concepto de velocidad de escape, una rapidez superficial finita que permite a un objeto abandonar la órbita terrestre. Y esto también explica por qué una cantidad finita de energía basta para liberar permanentemente un electrón de su átomo, y efectos similares que hacen posibles las reacciones químicas.

Pero la integral del inverso simple desde 1 hasta el infinito no converge. En consecuencia, en un universo bidimensional no hay velocidad de escape, y a la NASA de dos dimensiones le resultaría mucho más difícil salir de su planeta, aunque con energía suficiente podría llegar a cualquier punto finito. También implica que los elementos químicos serían mucho más estables. En realidad, gran parte de nuestra química y física sería imposible, así que los pobres habitantes de El Planiverso se encontrarían en un universo mucho más pobre que el nuestro, incluso dejando de lado la falta de dimensiones. De hecho, con esta información en mente, deberíamos dudar seriamente de que esos seres puedan existir, o de que su mundo no esté demasiado limitado por esa ley del inverso simple.

Sin embargo, no todo está perdido. Revisemos nuestro razonamiento inicial: ¿podría ser que, de alguna manera, el universo 2D obedezca aún la ley del inverso del cuadrado? Una posibilidad es que sea un subconjunto de un universo verdaderamente tridimensional: en tal caso, nuestro punto de luz tendría que iluminar no solo la circunferencia, sino también un área esférica por encima y por debajo del plano, que los habitantes desconocen. Otra posibilidad es que el espacio 2D no esté vacío: quizá exista algún tipo de éter que absorba parcialmente la energía y la haga disiparse más rápido. Seguramente puedas imaginar otras formas en que este universo bidimensional podría "rescatar" la ley del inverso del cuadrado, y mantener así una física y una química viables.

En cualquier caso, este experimento mental muestra que, al cambiar

la dimensionalidad de los universos, la idea original de Abbott de razonar por analogía tiene sus límites. Necesitamos pensar con sumo cuidado en los cambios que sufrirían la física y la química al intentar describir un universo bidimensional de forma realista.

Visitantes de la próxima dimensión

Del pódcast Mutación matemática 17

¿Qué aspecto tendría para nosotros la visita de una criatura de cuatro dimensiones que pasara por nuestro espacio? Una cuarta dimensión espacial es algo difícil de concebir, así que lo mejor es responder por analogía: pensar en cómo se verían las figuras tridimensionales al atravesar un mundo bidimensional.

Imagina a los habitantes de Planilandia. Ellos pueden desplazarse en dos dimensiones y observar lo que ocurre en su plano, pero no pueden percibir nada que esté más allá. Si una criatura u objeto tridimensional atraviesa su plano, solo pueden ver las secciones en las que se interseca con él, nunca el objeto completo.

Así que pensemos: ¿qué verían los planilandeses cuando una esfera atraviese su mundo? Al tocar por primera vez el plano, la esfera aparecerá como un punto. Luego, a medida que avanza, ese punto se convierte en un círculo, que crece hasta llegar a la mitad de la esfera. Después, comienza a encogerse hasta volver a ser un punto y desaparecer.

Por analogía, cuando una hiperesfera de cuatro dimensiones atraviese nuestro espacio, primero la veríamos como un punto, que se expande en una esfera. La esfera crecerá hasta que la hiperesfera esté a la mitad de su trayecto, y luego disminuirá hasta desvanecerse.

Más divertido aún es especular sobre cómo se verían las formas menos regulares de cuatro dimensiones al cruzar nuestro mundo. Supongamos que una criatura de 4D tuviera un “brazo” semejante a una mano humana. ¿Qué aspecto tendría al asomarse a nuestro espacio? Regresemos a la analogía: ¿qué ocurriría si tú metieras tu mano en el plano de Planilandia? Primero aparecerían cinco círculos distorsionados, correspondientes a tus dedos. Luego se irían ensanchando y, de pronto, al llegar la palma al plano, todos se fusionarían en una gran mancha. De la misma manera, si esa criatura de cuatro dimensiones metiera su mano en nuestro mundo, veríamos primero varias esferas irregulares que crecerían un poco y, de repente,

se unirían en una masa mayor cuando la “palma” llegara a nuestro espacio.

Especulaciones como estas han llevado a algunos a pensar que los OVNIs, las apariciones de fantasmas o las visitas angelicales podrían ser criaturas de dimensiones superiores que atraviesan nuestro mundo. Personalmente, lo dudo bastante —sobre todo porque la mayoría de esos “avistamientos” describen humanoides, no seres extrañamente fragmentados y fusionados como en nuestra metáfora de la mano—. Pero supongo que, en principio, todo es posible.

¿Puede presentarse la verdadera cuarta dimensión?

Del pódcast Mutación matemática 30

Como hemos venido comentando, la cuarta dimensión sería una dirección nueva, perpendicular a la longitud, la anchura y la altura, nuestras coordenadas X/Y/Z habituales, y representaría una medida totalmente distinta a las que percibimos en la vida diaria. Pero a menudo se escucha hablar del Tiempo como la cuarta dimensión, y en cierto modo el tiempo cumple con la definición de dimensión. Entonces, ¿debemos considerarlo simplemente otra dimensión, como X, Y y Z, o se trata de un concepto distinto?

Aclaremos primero que no hablo aquí de definiciones matemáticas estrictas. En cierto sentido, cualquier número que describa algún aspecto de un objeto puede considerarse una dimensión: color, brillo, voltaje, etc. Los informáticos suelen hablar de espacios "n-dimensionales" cuando modelan un conjunto de parámetros —por ejemplo, buscando la combinación más rápida o más barata de ciertas variables—. Los teóricos de cuerdas incluso han propuesto que el universo requiere 10 u 11 dimensiones. Pero en este pódcast me refiero más a nuestro sentido intuitivo de una "dimensión" como una medida fundamental, tan significativa como lo son longitud, anchura y altura. ¿Encaja el tiempo en este criterio?

La forma más básica de responder es preguntarnos: ¿para que un objeto exista, necesita necesariamente una medida de tiempo, igual que necesita medidas espaciales? Si digo que un objeto mide cinco pies de largo y cero de ancho, es obvio que no existe: algo sin anchura es imposible. De la misma manera, la duración, es decir, el tiempo durante el cual algo existe, parece comparable: si un objeto existe durante cero segundos, no existe, lo mismo que uno de ancho cero. Todo debe tener longitud, anchura, altura y duración.

Otro criterio intuitivo es: ¿puede el tiempo intercambiarse con una dimensión espacial? Podemos rotar un objeto y permutar sus coordenadas X e Y. ¿Podemos hacer lo mismo con el tiempo y el espacio? En cierto sentido, sí. Pensemos en Planilandia: un mundo

bidimensional, como una hoja de papel, donde criaturas como cuadrados o triángulos viven sin saber que existe otra dirección de movimiento fuera del papel.

Imagina ahora que vemos la película Planilandia: El filme, donde la vida de esas criaturas se desarrolla a lo largo de un par de horas. Si capturamos cada fotograma y los imprimimos, apilándolos sobre la mesa, el primero será el primer segundo, el siguiente el segundo dos, y así sucesivamente hasta llegar al último. De ese modo, hemos convertido el tiempo en altura espacial. Con los fotogramas impresos en vidrio, podríamos ver la trayectoria serpenteante del protagonista cuadrado dentro de un gran cubo transparente: esa trayectoria es lo que los físicos llaman una línea de universo, una representación estática de la actividad de una criatura a lo largo del tiempo. Nosotros también tendríamos nuestras propias líneas de universo, aunque para graficarlas necesitaríamos una cuarta dimensión espacial además del tiempo.

No es necesario ir tan lejos. Piensa en un gráfico de la evolución del precio de una acción en un año: básicamente estás viendo la línea de universo de esa acción, con el tiempo convertido en un eje espacial.

Entonces, si las líneas de universo permiten traducir el tiempo a una dimensión espacial, ¿es definitivo que el tiempo sea “otra” dimensión más? No lo creo. Por mucho que los físicos insistan en que el tiempo es solo un término más en sus ecuaciones, todos intuimos que hay algo distinto en él. Es la única dimensión que nos ata como prisioneros cósmicos, obligándonos a viajar siempre en una sola dirección y a la misma velocidad, sin importar lo que queramos.

En última instancia, esta discusión se parece un poco a la disputa sobre si Plutón es un planeta: todo depende de cómo definamos las palabras. En algunos aspectos, el tiempo sí es como las demás dimensiones, y los gráficos de líneas de universo lo muestran con claridad. Pero la forma única en que lo experimenta nuestra conciencia lo convierte, en cierto modo, en otra cosa. Si decides considerar el tiempo como una dimensión o como algo aparte, no creo que ni las matemáticas ni la física puedan darte nunca una respuesta definitiva.

Una casa en cuatro dimensiones

Del pódcast Mutación matemática 111

Hace poco volví a leer el clásico relato de Robert Heinlein de 1940, … y construyó una casa torcida (…And He Built a Crooked House.) Es una historia ingeniosa sobre un arquitecto que decide construir una casa de cuatro dimensiones.

Al principio, uno podría objetar que en nuestro mundo solo podemos construir objetos en tres dimensiones. Y, si eres un poco más puntilloso, podrías señalar que todas las casas son ya "cuatridimensionales", si consideramos el tiempo como cuarta dimensión: mientras no desaparezcan de golpe, poseen también una medida en el tiempo.

Pero el arquitecto de Heinlein, Quintus Teal, quería levantar una verdadera casa de cuatro dimensiones, extendida en un cuarto eje espacial, verdaderamente perpendicular a nuestros habituales ejes X, Y y Z, aunque imperceptible para nosotros. Para lograrlo, empezó pensando en la metáfora de construir un cubo tridimensional a partir de papel bidimensional. Seguro que alguna vez viste un "cubo desplegado", en una hoja de papel puedes dibujar seis cuadrados con forma de cruz, recortarlos y doblarlos para formar un cubo. Por analogía, ¿no deberíamos poder hacer algo similar con un hipercubo de cuatro dimensiones?

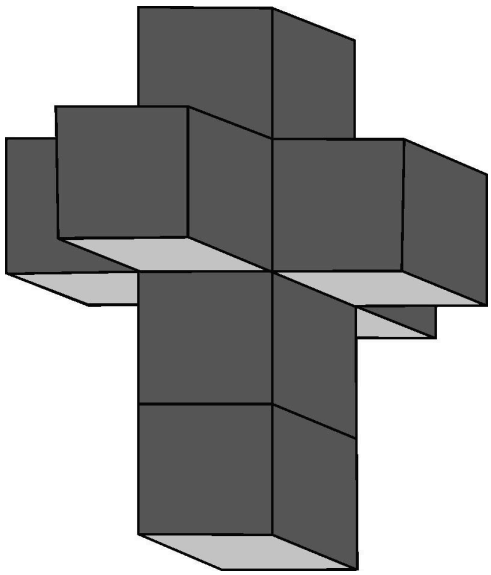


Figura 4-1. Un hipercubo desplegado

Al igual que dibujar un cubo desplegado en 2D, debería ser posible construir un hipercubo desplegado en el espacio tridimensional. Esto consistiría en ocho cubos, dispuestos en una figura en forma de cruz tridimensional: una torre de cuatro cubos de altura, con cuatro cubos adicionales sobresaliendo de los lados del segundo cubo desde arriba.

Ahora bien, al igual que el cubo desplegado sigue siendo una figura plana hasta que lo pliegas en la tercera dimensión, el hipercubo desplegado no pasa de ser una extraña figura tridimensional hasta que lo pliegas en la cuarta dimensión. Así que, aunque la idea de Teal era arquitectónicamente curiosa, no era un verdadero hipercubo. Claro que Heinlein era escritor de ciencia ficción, y encontró la forma de saltarse ese pequeño obstáculo.

La casa fue construida en la sísmica California. Una noche, tras un fuerte terremoto, Teal llegó y descubrió que lo único que veía era… ¡un cubo! Durante el seísmo, su hipercubo desplegado se había plegado en la cuarta dimensión. Y, del mismo modo que un ser bidimensional solo vería un simple cuadrado si un cubo se apoyara en su plano, Teal solo podía ver el “cubo inferior” de toda la estructura de cuatro dimensiones.

Dentro de la casa, la confusión aumentaba. Al recorrerla, Teal y sus amigos giraban de repente en ángulos imposibles en el espacio de cuatro dimensiones, reapareciendo en otros lugares de nuestro espacio

3D. Imagina un planilandés que llega al borde de un cubo: sin poder concebir el giro en la tercera dimensión, no tendría control sobre si sigue recto por el plano o acaba trepando por la pared del cubo. Podría pensar que ha atravesado tres habitaciones —subiendo por un lado, cruzando la parte superior y bajando por el opuesto— y de pronto encontrarse en el mismo punto de entrada, frente a la puerta principal, pero desde otra dirección.

Claro que el relato tiene un fallo grave, incluso aceptando la "realidad" peculiar de Heinlein. Para que un hipercubo desplegado se pliegue en un hipercubo real, el terremoto tendría que ser una especie de superterremoto multidimensional, capaz de ejercer fuerza en la dirección de la cuarta dimensión. Si eso fuese cierto, los objetos cercanos a la casa también deberían haberse visto afectados: habría edificios desaparecidos, huecos en el paisaje, lugares donde cosas fueron lanzadas fuera de nuestro hiperplano tridimensional hacia otras partes del espacio 4D. Volviendo a la metáfora: ¿qué probabilidad habría de que un terremoto común plegara en cubo un dibujo desplegado en un papel, sin ningún otro efecto visible sobre el propio papel?

En cualquier caso, no recomendaría intentar construir una casa en cuatro dimensiones en el mercado inmobiliario actual. Tal vez sea más sensato ahorrar materiales y mudarse a dos dimensiones.

Dar la vuelta en el tiempo

Del pódcast Mutación matemática 63

Seguro que, si lees este libro, alguna vez has fantaseado con viajar en el tiempo. Si el tiempo fuera realmente otra dimensión, igual que las tres espaciales, ¿no deberíamos poder cambiar de dirección? ¿Estamos de verdad condenados a avanzar siempre hacia adelante, a un ritmo más o menos constante, salvo que vayamos lo bastante rápido como para aprovechar las distorsiones de la relatividad? Resulta divertido imaginar qué pasaría si pudiéramos hacer un giro en U en el tiempo, igual que en el espacio.

Veamos un ejemplo concreto. Supongamos que tengo cita con el médico al mediodía y tardo diez minutos en llegar andando. Miro el reloj y ya son las doce. No importa: gracias a mi capacidad de "caminar en el tiempo".

Salgo de casa, camino cinco minutos hacia la clínica y entonces hago un giro en U temporal. Sigo andando en el espacio hacia el consultorio, pero retrocediendo cinco minutos en el tiempo. Así, exactamente a las doce en punto, llego a la puerta del médico.

¿Qué vería una pareja de vecinos, sentada en su porche, observando? Desde mi casa, me verían salir a las 12:00 y estar a mitad de la calle a las 12:05. Pero desde la consulta ocurriría algo extraño: a las 12:00 ya habría una "versión hacia atrás" de mí mismo entrando por la puerta. A las 12:01 estaría un minuto más lejos, retrocediendo. A las 12:02, dos minutos más lejos, y así sucesivamente. Lo más insólito ocurre a las 12:05: mi yo que avanza y mi yo que retrocede se encuentran, se fusionan… ¡y desaparecen! A las 12:06 ya no hay nadie en medio de la calle, porque en el minuto anterior di la vuelta en el tiempo. Para los vecinos, parecería que me desintegré tras chocar conmigo mismo.

Por supuesto, después vuelvo a avanzar y llego al consultorio en ese mismo instante temporal, solo que desde la sala de espera. Y si es un médico típico, experimentaré muchas "eras" del tiempo ahí sentado, pero eso es otro asunto.

Lo curioso es que algo tan absurdo, aplicado a una persona, parece tener un paralelo real en la física de partículas subatómicas. Se conoce un tipo de interacción en la que un electrón y un positrón chocan y generan un fotón. También puede suceder lo inverso: un fotón se descompone espontáneamente en un electrón y un positrón. Según una teoría propuesta por el célebre físico Richard Feynman en 1949, el positrón no es más que un electrón viajando hacia atrás en el tiempo. Así, cuando electrón y positrón colisionan, lo que ocurre en realidad es que el electrón golpea el fotón y da la vuelta en el tiempo, exactamente igual que en mi paseo hacia el médico. Y el "positrón" que chocó con él es solo el mismo electrón, pero retrocediendo.

De forma análoga, cuando un fotón se divide en electrón y positrón, lo que está pasando es que un electrón que venía del futuro, retrocediendo en el tiempo, choca con el fotón, rebota y se convierte en un electrón normal que avanza hacia adelante.

Así que, aunque yo no pueda girar en la cuarta dimensión para llegar puntual a mi cita, estos giros temporales sí parecen existir en el mundo subatómico, al menos según algunas teorías.

Monstruos espagueti de 11 dimensiones

Del pódcast Mutación matemática 38

Seguramente has oído hablar de la teoría de cuerdas, esa exótica propuesta que domina la física de partículas fundamental. Afirma que, en lugar de partículas puntuales, los componentes últimos de la materia son diminutos bucles vibrantes de cuerda. Una de sus propiedades más extrañas es que estas cuerdas son 10 u 11-dimensionales, aunque solo percibimos cuatro de ellas: las tres espaciales y el tiempo. Las dimensiones restantes serían indetectables con nuestros métodos. Su existencia es necesaria para que las ecuaciones de la teoría funcionen, aunque resulte difícil de creer. ¿Cómo puede ser que vivamos en un mundo de 11 dimensiones y solo percibamos cuatro?

Una forma sencilla de entenderlo es volver a nuestra metáfora conocida: Planilandia. Allí, los habitantes —círculos y cuadrados vivientes— se desplazan dentro de su plano infinito, sin poder salir de él ni imaginar los ejes "arriba" y "abajo". Ahora supongamos que su plano no es tal, sino la superficie de una enorme burbuja de jabón flotando en nuestro espacio. En ese caso, Planilandia es realmente una superficie tridimensional, aunque sus habitantes lo ignoren. Es la misma idea que Dionys Burger propuso en Esferalandia.

Del mismo modo, puede que nosotros vivamos en una sub-superficie de cuatro dimensiones dentro de un universo realmente de 11.

Otra posibilidad es que esas dimensiones extra estén compactadas, enrolladas en espacios tan diminutos que resultan imposibles de detectar. Pensemos ahora en los primos "dimensionalmente limitados" de los planilandeses: los linelandeses. Su mundo es unidimensional; son puntos que solo pueden avanzar o retroceder en una línea. Allí nunca podrían adelantarse unos a otros, porque no existe "salirse del camino".

Pero imaginemos que esa línea es en realidad un espagueti infinitamente largo, muy delgado. En tal caso, el linelandés vive en un objeto tridimensional, aunque inmenso en una dirección y microscópico en las otras dos. Sus habitantes estarían formados por

pequeños anillos y tubos en la superficie del espagueti, pero, incapaces de detectar nada a la escala de su grosor, jamás imaginarían las dimensiones adicionales.

Nosotros podríamos estar en una situación semejante… solo que nuestro espagueti tendría 11 dimensiones.

Entonces, ¿será que deambulamos sobre la superficie de una gigantesca burbuja de jabón en el espacio-tiempo multidimensional? ¿O caminamos tontamente sobre la piel de un espagueti de 11 dimensiones, ignorando las infinitas direcciones que existen más allá? ¿O acaso los teóricos de cuerdas juegan un juego elegante con sus ecuaciones, sin conexión con la realidad? Quien logre descubrir y demostrar la respuesta real tendrá asegurado un Premio Nobel.

Tu cocina en cinco dimensiones

Del pódcast Mutación matemática 133

En este capítulo hemos estado hablando de las extrañas propiedades de la geometría multidimensional, con la clara implicación de que estas situaciones raras solo podrían surgir como resultado de especulación salvaje o de cálculos detallados de físicos avanzados. Pero ¿sabías que probablemente ya tienes en tu cocina objetos que hacen uso de geometría de cinco dimensiones? Algunos tipos de recubrimientos para utensilios de cocina antiadherentes están hechos con un material descubierto hace poco y muy útil llamado cuasicristales.

Para entender qué son los cuasicristales, conviene repasar antes el concepto de teselación aperiódica, que describimos en el capítulo 3. Una teselación periódica es un conjunto de formas que cubren un plano repitiendo continuamente un patrón simple, lo que se conoce como "simetría traslacional". Los ejemplos más obvios son los mosaicos de cuadrados o hexágonos que se repiten hasta el infinito, como los que podrías ver en el suelo de un baño.

Una teselación aperiódica también cubre el plano con un pequeño conjunto de formas, pero no existe ninguna sección que se repita una y otra vez en un patrón regular. Aunque las formas básicas aparecen infinitas veces, no hay ningún grupo de ellas que se repita para rellenar todo el plano. La teselación de "cometas y dardos" de Roger Penrose, en la que dos tipos de cuadriláteros irregulares pueden cubrir un plano sin repetir patrón, es un ejemplo famoso. Otro aspecto sorprendente es que algunas teselaciones aperiódicas pueden mostrar simetría rotacional en regiones locales: por ejemplo, un conjunto de piezas puede girarse cierto ángulo y verse idéntico al punto de partida, como la simetría de 5 ejes en la teselación original de Penrose.

Otra propiedad curiosa de las teselaciones aperiódicas es que muchas pueden obtenerse proyectando retículas periódicas de 4 o más dimensiones; en otras palabras, lo que percibimos como aperiodicidad es solo el "efecto sombra" de una estructura perfectamente regular en

un espacio de más dimensiones. Un buen artículo en línea de Stefan Weber lo ilustra gráficamente, mostrando cómo a partir de una retícula regular 2D se puede derivar un patrón aperiódico 1D. La clave consiste en colocar un hiperplano n-dimensional con una pendiente irracional dentro de una estructura de n+1 dimensiones; la irracionalidad evita que su proyección tenga un patrón repetitivo. Así, el hecho de que veamos tantas teselaciones como aperiódicas puede considerarse simplemente un artefacto de nuestra visión limitada de los espacios de más dimensiones.

¿Y cómo llegamos de esto a los cuasicristales? Los cristales ordinarios son el análogo tridimensional de las teselaciones periódicas: formas sólidas simples que se repiten una y otra vez para formar la estructura cristalina. (Bueno, no del todo infinitamente, porque no estoy incrustado en un cristal mientras escribo esto, pero se entiende la idea). De ahí surgió la pregunta: ¿podrían existir también teselaciones 3D aperiódicas, que diesen lugar a otro tipo de cristal?

Los científicos pensaban que no era posible, pero en 1984 un grupo de investigadores reportó un cristal de aluminio-manganeso cuyo patrón de difracción mostraba una simetría de cinco pliegues. Esto resultaba muy extraño, ya que ese tipo de simetría se consideraba imposible en cristales, algo parecido a intentar rellenar un plano solo con pentágonos. Llegaron a la conclusión de que se trataba de un cristal aperiódico. La comunidad científica fue escéptica al principio, pero pronto se descubrieron muchos otros casos similares. Finalmente, en 1991, la Unión Internacional de Cristalografía enmendó su definición de cristal para incluir los casos aperiódicos.

Hoy se conocen cientos de tipos de cuasicristales, incluidos algunos estables. En 2009 incluso se descubrió un cuasicristal natural en una roca de una cordillera rusa. Y algunos de los estables parecen tener una propiedad muy valiosa, quizá debido en parte a su naturaleza aperiódica: resulta muy difícil que otros materiales se adhieran a ellos, lo que los convierte en un material ideal para recubrir utensilios de cocina antiadherentes. Una empresa llamada Sitram desarrolló y comercializó hace unos años una línea de ollas y sartenes recubiertas de cuasicristales, bajo la marca Cybernox.

Así que, la próxima vez que quieras burlarte de los matemáticos por

perder el tiempo con ideas descabelladas sobre teselaciones aperiódicas y espacios de más dimensiones, detente primero… y fríete un huevo.

A medida que pasa la matemática

Del pódcast Mutación matemática 134

Últimamente he estado leyendo el libro Warped Passages de Lisa Randall, en el que habla de teoría de cuerdas, dimensiones superiores y otros aspectos alucinantes de la física moderna. En la introducción de un capítulo, menciona que la famosa canción As Time Goes By, que seguramente has oído en la película Casablanca, tiene versos adicionales que hacen referencia a Einstein y a la cuarta dimensión. Supuse que me estaba tomando el pelo, pero busqué en la web por si acaso. Y me sorprendió descubrir que múltiples fuentes, aparentemente independientes, confirmaban que la canción realmente contiene esas letras.

La canción, escrita originalmente en 1931 para un musical de Broadway antes de aparecer en Casablanca, tiene un estribillo famoso. Te ahorraré el dolor de escucharme cantar y solo citaré parte de la letra: "You must remember this / A kiss is just a kiss, a sigh is just a sigh. / The fundamental things apply / As time goes by." Una canción bonita, sí, pero bastante cursi, y que no tiene mucho que ver con la ciencia o las matemáticas. Pero ese estribillo —lo que llegó a la película y lo que se suele escuchar en las versiones posteriores— en realidad no aparece hasta la mitad de la canción original. La canción comienza así: "This day and age we're living in / Gives cause for apprehension / With speed and new invention / And things like fourth dimension / Yet we get a trifle weary / With Mr. Einstein's theory / So we must get down to earth at times / Relax relieve the tension."

¿Cómo llegaron referencias a ideas que en aquel momento eran de vanguardia en física y matemáticas a un conjunto de letras de Broadway? Un artículo muy interesante del profesor de la Universidad de Brown, Philip Davis, da algo de contexto. Como explica Davis: "En los años veinte y después, los periódicos estaban llenos de noticias sobre Einstein y su teoría. Era el genio por antonomasia. El término relatividad estaba en el aire, y se convirtió en una palabra de moda…". De hecho, estas ideas estaban tan presentes en la conciencia pública

que se aplicaban nociones medio entendidas de la relatividad a actividades cotidianas: por ejemplo, cuando un viaje en coche tardaba más de lo esperado, la gente echaba la culpa a la teoría de Einstein. A menos que uno viajara a una fracción significativa de la velocidad de la luz, la relatividad no tenía nada que ver. El autor de As Time Goes By, Herman Hupfeld, se había graduado en Cornell, y por tanto probablemente estaba en el nivel más alto de comprensión en este tema… al menos para ser una figura de la cultura popular.

Una pregunta más interesante es si los temas de la canción —y de la película Casablanca— encajan realmente con esas referencias a Einstein y a la cuarta dimensión. Creo que se puede hacer el caso de que sí, aunque claramente los productores de la película no lo pensaron así. Davis describe la conexión de esta manera: "Los tiempos cambian y nosotros cambiamos con ellos. A pesar de todos los cambios revolucionarios que ocurrieron en su vida, el compositor Hupfeld afirmaba que algo en la naturaleza humana permanece. La matemática y la física buscan invariantes; Hupfeld buscaba los invariantes de la experiencia humana."

De forma curiosa, algunas versiones posteriores de la canción, como las de Binnie Hale y Rudy Vallee, cambiaron una sola palabra: "cuarta dimensión" se convirtió en "tercera dimensión". ¿Intentaban hacer una declaración profunda sobre la planitud de la existencia humana moderna? ¿O eran simplemente celebridades despistadas que nunca habían oído hablar de la cuarta dimensión y asumieron que era un error tipográfico? Nunca lo sabremos.

Entre las dimensiones

Del pódcast Mutación matemática 22

Todos sabemos que una figura unidimensional es una línea o una curva: esencialmente algo cuya medida se obtiene con la distancia lineal desde un punto de partida. Y una figura bidimensional es una superficie, donde necesitamos dos coordenadas—como latitud y longitud—para situarnos. Entonces, ¿cómo sería una figura de 1,2 dimensiones? La pregunta suena absurda al principio —¿quién podría imaginar tal cosa?— pero en realidad existen figuras con dimensiones fraccionarias. De hecho, esas dimensiones fraccionarias se usan para describir fractales, como el Copo de nieve de Koch que comentamos en el Capítulo 2.

Para repasar: un fractal como el copo de Koch es, esencialmente, una curva con detalle infinito. (Esa descripción abarca solo una subclase de fractales, pero sirve para nuestro propósito aquí.) Los fractales son útiles para modelar cosas como montañas y líneas de costa. Para captar la idea de "detalle infinito", fijémonos en cómo se mediría una línea costera en la vida real. Supón que miras un mapa del mundo e intentas medir la costa de Oregón. A simple vista no verás detalles por debajo de escalas de cien millas más o menos, y tu estimación podría ser, digamos, 480 km. Ahora mira un mapa solo de Oregón: aparecerán pequeñas indentaciones en la costa que pasaste por alto en la visión a gran escala… y la cifra puede subir hasta ~560 km. Si te animas y caminas por la playa de Astoria a Brookings midiendo con una vara, seguirás bahías y recodos diminutos que no salen en el mapa estatal; al sumar todo, la distancia aumenta aún más, quizá cientos de millas adicionales. Y si te arrastras con un microscopio electrónico para no perder ni un grano de arena, la longitud se estirará otra vez.

Entonces: ¿cuánto mide realmente la costa de Oregón? La pregunta carece de buena respuesta: todo depende de la granulometría de la medición. En la práctica siempre hay un límite donde conviene parar, claro. Pero un fractal es una curva matemática ideal que ejemplifica esta situación: puedes seguir refinando la escala hasta el infinito y la

longitud seguirá incrementándose. Dicho de otro modo, en los fractales puede haber, en cierto sentido, una distancia infinita entre dos puntos. En esta clase de fractales, si crees haber recorrido una distancia finita y vuelves a mirar con más detalle, seguro que hallarás algún saliente o entrante que te faltó. Un único parámetro de coordenada no basta para localizarte sobre la curva. Por eso se habla de dimensiones fraccionarias.

Un fractal como el copo de Koch es una curva, no una superficie, así que no puede decirse que sea bidimensional. Pero de algún modo es más que unidimensional, porque una sola coordenada (por ejemplo: la distancia desde un origen elegido) no basta para identificar un punto suyo. Los matemáticos han definido métodos precisos para calcular la "dimensión" de una curva, básicamente en función de la rapidez con que aparece nuevo detalle al afinar la escala. En el caso del copo de Koch, su dimensión se estima en aproximadamente 1,26.

Quizá objetes que estamos abusando del término "dimensión", usándolo para una medida que no encaja con nuestra intuición clásica de dimensiones. No puedo rebatir por completo esa objeción. Pero, por otro lado, creo que queda claro que la noción ordinaria de dimensión se resquebraja ante los fractales: allí la idea tradicional ya no basta para captar la complejidad geométrica que aparece al acercarnos.

CAPÍTULO 5

Comprendiendo el universo

Como muchos de los que leen este libro, he sido un fanático de la ciencia ficción —películas, libros y series de televisión— durante toda mi vida. Esto no es nada raro para alguien apasionado por las matemáticas y la informática, ya que siempre ha existido una fuerte correlación entre el interés en matemáticas, los viajes espaciales y la ciencia ficción. En parte es natural: después de todo, nuestro programa espacial y nuestro conocimiento de la astrofísica, la astronomía y la cosmología dependen en gran medida de algunas de nuestras técnicas matemáticas más avanzadas. Pero creo que va más allá: existe una similitud fundamental entre la manera en que estiramos nuestra mente para imaginar qué puede haber más allá de nosotros en el espacio, y lo que podría existir en las muchas posibilidades matemáticas más allá de nuestros sistemas cotidianos de contar y medir.

¿El “Bang” falso?

Del pódcast Mutación matemática 68

Ya todos estamos acostumbrados a la teoría del Big Bang, el modelo estándar de la cosmología que afirma que nuestro universo comenzó infinitamente caliente y denso, y de pronto se expandió hacia afuera. También habrás oído hablar de la teoría de supercuerdas, mencionada en el capítulo anterior. Entre otras cosas, predice que el universo contiene en realidad once dimensiones, no solo las tres que vemos, y que vivimos en una especie de gigantesca membrana multidimensional —una brana— flotando dentro de ese espacio de más dimensiones. A primera vista, estas dos teorías no parecen contradecirse, pero en realidad hay muchos detalles del Big Bang —especialmente en cómo describe los primeros instantes del universo— que ponen nerviosos a algunos físicos.

Hace poco me intrigó leer en el blog de Rudy Rucker acerca de una

nueva teoría, desarrollada hace unos años por los físicos Paul Steinhardt de Princeton y Neil Turok de Cambridge. Se trata de reemplazar el modelo del Big Bang con algo diferente, usando esta visión de la naturaleza multidimensional de nuestro universo.

La idea básica es: si vivimos en una membrana que flota en un espacio multidimensional, ¿por qué debería ser la única? Supón que existen otras branas similares flotando. ¿Qué pasa cuando dos de ellas colisionan? Steinhardt y Turok trabajaron más de un año en las ecuaciones que describirían esa situación. Descubrieron que, al acercarse dos membranas, estas empezarían a ondularse y distorsionarse. En cierto momento, los picos de un par de ondulaciones se encontrarían y colisionarían, generando un efecto muy parecido al Big Bang. El impacto produciría una ráfaga de energía y una rápida expansión del espacio, y debido a los picos y valles de las ondulaciones quedarían zonas calientes y frías después de la colisión. Dichas zonas coinciden con lo que observamos en el universo. Este nuevo modelo se conoce como el modelo ekpirótico, del griego para "conflagración".

Lo más interesante, sin embargo, es el futuro a largo plazo en este modelo. Según la teoría del Big Bang, con la expansión acelerada del universo, este acabará esencialmente vacío, con todas las partículas de materia alejándose unas de otras. Pero en la nueva teoría, la brana vecina con la que chocamos al inicio seguirá ahí, flotando en el espacio multidimensional… y eventualmente habrá otra colisión entre ambas branas ya vacías, produciendo una nueva explosión similar al Big Bang y reiniciando el ciclo de la materia. En vez de dirigirse hacia el vacío eterno, este modelo propone un universo cíclico, que se renueva y recomienza.

Claro que, como toda teoría nueva, genera mucha controversia. Igual que el Big Bang, esta también sufre de una singularidad, un punto en el que las ecuaciones se rompen en el origen del universo. Y el mismo Steinhardt advierte en su página que la idea se basa en aspectos no probados de la teoría de cuerdas. Hay investigaciones en curso para buscar evidencia a favor o en contra, como ondas gravitacionales que existirían en el Big Bang pero no en el ekpirótico. Sin embargo, los resultados tardarán mucho en llegar.

Aun así, resulta fascinante pensar que, como dijo el profesor David

Spergel de Princeton, tal vez “todo lo que los astrónomos han observado no sea más que una mota dentro de las dimensiones superiores, y toda la historia desde el Big Bang sea apenas un instante en la infinitud del tiempo”.

La forma del universo

Del pódcast Mutación matemática 86

Si eres oyente de Mutación matemática y fanático de Los Simpson, seguro recuerdas el episodio en que Lisa se une a Mensa y el físico Stephen Hawking visita Springfield para conocerla. En un momento, Hawking se toma una cerveza con Homero y le dice: "Tu teoría de un universo con forma de dona es intrigante… tal vez tenga que robarla". Como yo, probablemente te detuviste a pensar si ese chiste se basaba en una teoría real sobre la forma del universo. La respuesta, como tantas veces pasa en esa serie, es sí.

Para empezar, debemos comprender el concepto de la "forma del universo". Como ya discutimos, la física moderna concibe el universo como un objeto multidimensional; así que, en realidad, hablamos de análogos de formas en dimensiones superiores, no de las figuras 3D que conocemos. Pero podemos acercarnos a la idea con el viejo recurso de imaginar criaturas bidimensionales —los "planilandeses"— viviendo sobre la superficie de un universo 3D. El ejemplo más simple: la superficie de una esfera. Un ser bidimensional que viaje por un pequeño sector creerá que vive en un plano infinito. Pero, si sigue avanzando hacia el este, eventualmente reaparecerá desde el oeste. De modo que, si nuestro universo fuese la superficie 3D de una hiperesfera 4D, nosotros también podríamos regresar al punto de partida tras dar la vuelta completa por esa superficie.

La esfera es la metáfora más sencilla, pero no la única. Otra posibilidad discutida por los físicos es la dona, o en jerga matemática, el toro. ¿Cómo vería un planilandés un universo en forma de toro? Igual que en la esfera, si avanza bastante en una dirección, volverá al punto inicial. En el eje este-oeste, por ejemplo, tendrá que recorrer toda la circunferencia del universo, como en la esfera. Pero en la otra dirección, norte-sur, viajará a través del agujero de la dona y el recorrido será mucho más corto antes de regresar al origen.

Y no tenemos por qué detenernos en el toro. De hecho, los físicos barajan muchas formas aún más extrañas. En la sección anterior

mencionamos la alternativa al Big Bang donde vivimos en membranas multidimensionales ondulantes. Otra propuesta reciente imagina un dodecaedro conectado consigo mismo en dimensiones superiores: sería como vivir dentro de un balón de fútbol gigante, y al salir por una cara reaparecer por la opuesta, pero rotado 36 grados. Aún más extraña es la hipótesis de un cuerno de Picard: una forma cónica con un extremo angosto que se afina hasta el infinito y una boca ancha con un borde definido. Un viajero que llegue al borde de la boca reingresaría por dentro del cuerno. En este caso, el universo es no uniforme: muy amplio cerca de la boca (donde probablemente estemos), pero diminuto en el extremo angosto. Podrías llegar a un lugar donde fueras casi tan ancho como el universo mismo, capaz de estirarte y tocarte la espalda porque tu brazo rodeó todo el cosmos. Sería como vivir en una sala de espejos infinita, viendo tu propia espalda reflejada una y otra vez.

Los físicos del proyecto WMAP de la NASA han estado estudiando la radiación de fondo para buscar pistas sobre la forma real del universo. Resultados recientes publicados en línea parecen descartar las teorías más extravagantes, sugiriendo que el universo en su conjunto es plano, no curvado, con solo un 2% de margen de error. (Esto se refiere a la estructura global; la curvatura local, descrita por Einstein, sigue existiendo). Pero como en toda física cósmica, las teorías extrañas y los cambios radicales de consenso parecen ser la única constante. Así que, quién sabe qué dirán en unos años, o incluso antes de que este libro vea la luz.

Tu tamaño en el espacio y en el tiempo

Del pódcast Mutación matemática 148

¿Alguna vez te has preguntado qué tan grande eres realmente en comparación con la magnitud total del universo, ya sea en espacio o en tiempo? ¿Cómo se compara nuestra extensión en el espacio con la que tenemos en el tiempo? Como ambas son dimensiones que podemos calcular, no debería ser tan difícil hacer la cuenta.

El universo observable es una esfera con un diámetro de unos 92 mil millones de años luz, o $9{,}2\times10^{10}$ años luz. Un año luz son aproximadamente 10^{16} metros. Suponiendo que mides unos 2 metros, tu altura en "unidades de universo" sería $2 / (9{,}2\times10^{26})$, o $2{,}17\times10^{-27}$ universos.

¿Y qué pasa con tu tamaño en el tiempo? Como para este cálculo el tiempo es otra dimensión más, debemos tratarlo igual. El universo tiene unos 14 mil millones de años de antigüedad, aunque las estimaciones varían. Tomemos una visión optimista de la medicina y asumamos que vivirás unos 100 años. Tu tamaño en el tiempo sería $100 / (1{,}4\times10^{10})$, o aproximadamente $7{,}14\times10^{-9}$ universos.

Lo sorprendente es que tu tamaño en el tiempo resulta muchísimo mayor que tu tamaño en el espacio: por un factor de unos 3×10^{18}, es decir, tres trillones. Eso significa que, en términos de impacto en el universo, el tiempo que pasas aquí es mucho mayor que tu extensión física. Si tu tamaño en el espacio fuese tan grande como el de tu tiempo, serías un objeto astronómico importante. Y si tu tamaño en el tiempo fuese comparable al de tu espacio, aparecerías y desaparecerías en un instante. Es extraño ver cuán desproporcionadamente mayor es nuestra dimensión temporal que nuestra dimensión espacial, ¿no? ¿Será que eso dice algo sobre nuestra importancia para la posteridad frente a nuestra relevancia inmediata?

Seguro ya habrás notado algunos problemas con este cálculo. Para empezar, no conocemos el tamaño real del universo: más allá del universo observable puede haber una extensión infinita, demasiado lejana para que su luz nos alcance. Y en cuanto al tiempo, deberíamos

contar tanto el futuro como el pasado, y ni siquiera sabemos si la duración total será finita o infinita: tal vez seamos tan pequeños en el tiempo como en el espacio, solo que estamos cerca del comienzo.

También puedes plantear objeciones más filosóficas: ¿nuestro tamaño en el tiempo se limita a nuestra vida biológica, o sigue más allá mientras somos recordados e influimos en generaciones futuras? ¿Deberían Alejandro Magno o Julio César recibir 2.000 años de "crédito" porque sus nombres aún sobreviven? ¿Me cuentan los años después de morir, hasta que algún administrador de iTunes borre este pódcast y unos bárbaros antimatemáticos quemen todas las copias de este libro?

Vi este cálculo por primera vez en el libro Time and the Art of Living, de Robert Grudin. Grudin hace muchas reflexiones filosóficas de este estilo sobre nuestra relación con el tiempo y el espacio. Puede que no siempre resulten ciertas, pero sin duda hacen pensar.

Observando el Universo

Del pódcast Mutación matemática 61

¿Qué tan grande es el universo? No hay manera de responder a esa pregunta con certeza basándonos en nuestras técnicas actuales: tenemos que empezar hablando del "universo observable", todo aquello que realmente podemos detectar. Si algo está tan lejos que la luz, viajando desde la creación del universo, no ha tenido tiempo de alcanzarnos, entonces probablemente no tengamos suerte. Así que empecemos con esto: ¿qué tan grande es el universo que realmente podemos detectar?

Podrías pensar que la respuesta es bastante simple al principio. Según las teorías actuales, el universo tiene unos 13.700 millones de años, así que bastaría con dibujar una esfera de radio 13.700 millones de años luz alrededor de la Tierra, y eso describiría lo que podemos ver. Pero, sorprendentemente, esa respuesta es incorrecta. El problema es que estamos en un universo que se ha estado expandiendo en más dimensiones de las tres a las que estamos acostumbrados: desde Einstein, hemos comprendido que cualquier cálculo a escala cósmica debe usar una estructura de espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Volviendo a una analogía tipo Planilandia, piensa en nuestro espacio como la superficie de un globo gigante que se está inflando lentamente. Cosas que alguna vez estuvieron lo bastante cerca como para emitir luz que hoy podemos observar pueden haberse alejado cada vez más a medida que el globo se expande; así, la luz que fue lanzada hace mucho tiempo puede llegar a nuestros telescopios aunque el objeto real esté ahora mucho más lejos de esos 13.700 millones de años luz. Como resultado, nuestro universo observable contiene objetos que actualmente están a hasta 46.500 millones de años luz de distancia.

Una propiedad aún más extraña del universo observable es que podríamos estar observando un universo más grande que el que realmente existe, debido a la luz que viaja completamente alrededor del universo y nos alcanza por segunda vez. En otras palabras, el universo podría ser como una galería de espejos en una feria, con los mismos objetos visibles para nosotros muchas veces. Usando de nuevo la

analogía de la superficie del globo, imagina una línea directa desde una galaxia distante hasta nosotros en la superficie del globo, y otra línea que da toda la vuelta al globo y luego llega a nosotros. Ambas podrían ser caminos legítimos para que la luz nos alcance, y veríamos ambas como imágenes separadas. Ahora bien, ¿por qué somos tan crédulos? ¿No deberíamos darnos cuenta de inmediato si un objeto en el cielo es exactamente igual a otro? El problema es que, dado que la luz probablemente debe recorrer muchos miles de millones de años luz para dar toda la vuelta al universo, los objetos duplicados serán vistos en eras muy diferentes de su historia. No es fácil saber exactamente cómo se verá una galaxia en varios miles de millones de años, o cómo se veía esa cantidad de tiempo en el pasado. Algún objeto que hemos catalogado como una "galaxia distante" podría ser en realidad nuestra propia Vía Láctea, vista hace muchos miles de millones de años.

Por supuesto, también debemos tener en cuenta la muy probable posibilidad de que el universo sea mucho más grande de lo que podemos detectar. Esta discusión, por necesidad, se ha limitado al universo observable, ya que es de lo único de lo que podemos hablar con realismo. Pero es muy probable que en realidad estemos observando solo un subconjunto, y puede que nunca sepamos cuán grande es realmente el universo.

Álgebra alienígena

Del pódcast Mutación matemática 129

Un oyente me envió recientemente una pregunta interesante: había oído que teóricamente podríamos comunicarnos con alienígenas usando matemáticas. Pero está claro que muchos símbolos y convenciones matemáticas son culturalmente determinados, no universales: ¿cómo sabría un alienígena qué significa un signo de suma, o un signo de igualdad, o cómo identificar esa cosa enrevesada que usamos para simbolizar una integral en cálculo? La respuesta, sin embargo, es bastante sencilla: aunque hay muchos de esos aspectos en las matemáticas modernas, en realidad existen universales que podríamos aprovechar para la comunicación, incluso sin cultura compartida.

Un universal básico que podríamos usar es el concepto de números primos. Este método ha sido sugerido por numerosos científicos y matemáticos, y probablemente sea más famoso por su aparición en la novela Contacto de Carl Sagan. Como recordarás, un número primo es un número mayor que uno que solo es divisible por sí mismo y por 1. Dado que cualquier número es el producto de un conjunto único de factores primos, sin importar la base, las unidades o el sistema de medición, el concepto de primos seguramente habría sido descubierto por cualquier especie lo suficientemente avanzada en matemáticas como para establecer comunicación interestelar. No importa si en Alfa Centauri hay hidras de cinco cabezas que cuentan con sus 14 tentáculos en base 62: el concepto de número primo seguiría existiendo, y los mismos números serían primos. Además, los algoritmos conocidos para determinar números primos son lo bastante complejos como para que sea muy improbable que un proceso natural surja por azar y los genere. Así que, si enviáramos una serie de pulsos al espacio que se repitiera primero dos veces, luego tres veces, luego cinco veces, y así sucesivamente, expresando los primeros 100 números primos, cualquiera que los detectara probablemente asumiría que fueron generados por algún tipo de inteligencia.

Aunque enviar pulsos de números primos podría ser una buena forma de establecer la existencia de inteligencia, es difícil ver cómo eso podría llevar a una comunicación útil. ¿Cómo pasar de ser conscientes de la existencia de alienígenas lejanos a mensajes con contenido real? El problema parece insuperable al principio. Pero, sorprendentemente, en la década de 1960, el astrónomo Frank Drake ideó un esquema ingenioso que podría usarse para establecer una comunicación real con alienígenas desconocidos y distantes.

Así funciona. Toma dos números primos bastante grandes, que llamaremos p y q, y construye una pantalla rectangular de video que mida p píxeles por q píxeles. Cada punto de la pantalla puede estar encendido o apagado. Si tomamos todos los puntos de la pantalla, representando los puntos apagados por un pulso corto y los encendidos por un pulso largo, podemos convertirlos en una larga serie lineal de pulsos de longitud p × q. Luego podemos enviar repetidamente este mensaje al espacio.

¿Cómo sabrían los alienígenas qué hacer con este mensaje? Bueno, con suerte reconocerían que esta serie repetida de pulsos tiene una longitud que es el producto de dos números primos grandes, especialmente si ya hemos establecido nuestra existencia transmitiendo series de números primos. Suponiendo que los primos elegidos sean relativamente grandes, la probabilidad de que un proceso natural produzca pulsos repetidos de ese tamaño sería muy pequeña. Así, los científicos alienígenas sospecharían un origen inteligente. Entonces deberían darse cuenta de que este mensaje, como producto de exactamente dos primos, podría disponerse como una matriz bidimensional, ya sea p de ancho y q de alto, o q de ancho y p de alto. ¡Una de estas posibilidades replicaría nuestra pantalla original de p × q!

Usando este método, podríamos transmitir imágenes en blanco y negro de resolución arbitraria. Podríamos enviar cada foto de Facebook a los alienígenas, aunque tal vez no sea buena idea si queremos que nos devuelvan la llamada. Pero también podríamos enviarles ejemplos de nuestra biología, nuestro arte y nuestra tecnología. Incluso podríamos hablar de elementos químicos, usando conjuntos de n puntos para representar el elemento con número atómico n, y si los alienígenas son lo bastante astutos al interpretar las imágenes, esto podría incluso

informarles del contenido químico de los objetos en las fotos que enviamos.

Así, usando matemáticas básicas, podríamos establecer un sorprendente nivel de comunicación con especies alienígenas. De hecho, ya lo estamos intentando: el proyecto SETI (Search for Extraterrestrial Intelligence) transmitió una imagen utilizando el método de Drake que contiene figuras de personas, la doble hélice del ADN, representaciones de los átomos que componen el ADN y esquemas del radiotelescopio que envió el mensaje. Desafortunadamente, tenemos que ser pacientes, ya que lo más probable es que, incluso si alguien lo recibe, la respuesta tarde miles de años en llegar... si es que seguimos aquí para reconocerla como tal.

Mundos con el tiempo invertido

Del pódcast Mutación matemática 195

Recientemente leí el clásico libro de Martin Gardner Izquierda y derecha en el Cosmos: Simetría y asimetría frente a la teoría de la inversión del tiempo (The New Ambidextrous Universe), sobre diversas formas de simetría en la física moderna. Una de las ideas más divertidas que se discuten en ese libro es la de los mundos con el tiempo invertido. ¿Está realmente fija la dirección del tiempo, tal como parece desde nuestro punto de vista? ¿O podrían existir partes de nuestro universo donde el tiempo transcurra al revés de como lo observamos, de modo que nuestro futuro sea su pasado, y viceversa? Naturalmente, esta idea ha sido explorada por muchos escritores de ciencia ficción a lo largo del último siglo. Creo que mi uso favorito de la idea es el de Kurt Vonnegut en su novela Matadero cinco. Permíteme citar un poco de la descripción de Vonnegut sobre cómo un observador con el tiempo invertido describiría el bombardeo de Dresde durante la Segunda Guerra Mundial:

La formación voló hacia atrás sobre una ciudad alemana en llamas. Los bombarderos abrieron las compuertas de sus bodegas, ejercieron un magnetismo milagroso que encogió los incendios, los reunió en contenedores cilíndricos de acero y levantó los contenedores hacia las entrañas de los aviones. Los contenedores fueron almacenados ordenadamente en estantes... Cuando los bombarderos regresaron a su base, los cilindros de acero fueron retirados de los estantes y enviados a Estados Unidos, donde fábricas trabajaban día y noche para desmantelarlos, separando el contenido peligroso en minerales. Emotivamente, eran sobre todo mujeres quienes realizaban este trabajo. Luego los minerales eran enviados a especialistas en regiones remotas. Su tarea era ponerlos en la tierra, esconderlos con ingenio, para que nunca volvieran a dañar a nadie.

Más seriamente, podríamos preguntarnos: ¿cómo podría ser posible un mundo con el tiempo invertido? Una idea proviene del concepto de antimateria. Como recordarás de la física, la mayoría de las partículas

fundamentales tienen una antipartícula correspondiente con carga opuesta. Por ejemplo, un electrón tiene carga negativa y su antipartícula, el positrón, tiene carga positiva. Cuando una partícula y una antipartícula colisionan, se aniquilan mutuamente en una ráfaga de energía, creando un nuevo fotón, o partícula de luz. Como discutimos en el capítulo anterior, Feynman tuvo una idea curiosa: quizá las antipartículas sean simplemente partículas que viajan hacia atrás en el tiempo. Por ejemplo, una interacción típica en un diagrama de Feynman podría mostrar un electrón y un positrón colisionando, generando un fotón de corta vida, y luego el fotón creando un par electrón-positrón. Pero también podrías interpretarlo como el primer electrón invirtiendo súbitamente su dirección, emitiendo un fotón al girar hacia atrás en el tiempo para convertirse en un positrón. Luego, poco después, un positrón viajando hacia atrás en el tiempo colisiona con el fotón e invierte su dirección para convertirse en un electrón que se mueve hacia adelante. La imagen resultante es exactamente la misma.

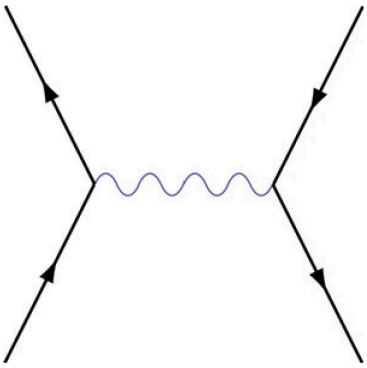


Figura 5-1. Diagrama de Feynman de colisión electrón-positrón

Si la antimateria es simplemente materia viajando hacia atrás en el tiempo, ¿podría haber sistemas solares y mundos enteros en alguna parte del universo formados por antipartículas y, por lo tanto, experimentando el tiempo al revés desde nuestro punto de vista? Inicialmente resulta difícil distinguir directamente si un sistema solar distante es de materia o de antimateria, ya que el fotón es su propia antipartícula, y por tanto un sistema solar de antimateria se vería igual que uno de materia a través de un telescopio. Sin embargo, los físicos modernos han comprendido que el espacio interestelar contiene

algunos átomos, aproximadamente uno por metro cúbico. Esto no parece mucho, pero es suficiente para que cualquier frontera entre regiones de materia y antimateria sea detectable debido a que las partículas se aniquilarían mutuamente generando estallidos de rayos gamma. También hay partículas más pesadas que ocasionalmente llegan en los rayos cósmicos, y estas sugieren dónde podemos buscar evidencia de regiones de antimateria. Los físicos que investigan estos fenómenos están ya bastante seguros de que no existen regiones de antimateria en el universo observable. Sin embargo, aún podrían existir en zonas demasiado lejanas para que podamos observarlas.

Como era de esperar, existen otras objeciones a la posibilidad de inversión temporal en nuestro universo, como la necesidad de seguir las leyes de la entropía, que parecen marcar el tiempo en una sola dirección. Y si algunos alienígenas de antimateria con el tiempo invertido vinieran de visita, el encuentro sería bastante desagradable: serían aniquilados partícula por partícula en cuanto llegaran. Podríamos intentar comunicarnos con ellos por radio, pero sería una conversación bastante confusa, ya que las únicas preguntas que podrían responder serían aquellas que aún no hemos transmitido. Pero quizá, programando computadoras duraderas para enviar mensajes en algún momento futuro, podríamos al menos tener una rudimentaria discusión y llegar a ser conscientes de la existencia básica los unos de los otros.

Un planeta en forma de pera

Del pódcast Mutación matemática 120

Si creciste en Estados Unidos antes de mediados de los años setenta, probablemente aprendiste en la escuela primaria que Cristóbal Colón creía que la Tierra era redonda, mientras que sus tontos contemporáneos pensaban que era plana. Así, Colón era un visionario que primero comprendió la verdadera forma de la Tierra. Pero seguramente, unos años después, escuchaste la historia correcta: que nuestro planeta se sabía esférico desde la antigüedad, y que la disputa era meramente sobre su tamaño. La historia de la Tierra plana había sido parte de una biografía romántica de Colón del siglo XIX, escrita por Washington Irving, y de ahí entró en la cultura popular.

En realidad, no solo los antiguos ya creían que la Tierra era esférica, sino que en el siglo III a. C., Eratóstenes ideó una estimación notablemente precisa del tamaño de la Tierra. Lo hizo observando que, cuando el sol estaba directamente sobre Siene, lo cual se comprobaba porque iluminaba el fondo de un pozo recto, en la ciudad de Alejandría —directamente al norte— se proyectaba con un ángulo equivalente a 1/50 de un círculo. Dado que este ángulo de desviación debía ser teóricamente igual a la porción del arco terrestre cubierta por la distancia entre las dos ciudades, multiplicó la distancia entre Siene y Alejandría por 50, y obtuvo una estimación de unas 25.000 millas.

Curiosamente, la Wikipedia señala varios aspectos sospechosos de esta historia: las ciudades no están exactamente en un mismo meridiano norte-sur, la medición del ángulo no es del todo correcta, y no sabemos con certeza el tamaño exacto de las unidades de “estadios” griegos en relación con nuestras unidades actuales. Así que la precisión de la estimación de Eratóstenes sobre el tamaño de la Tierra puede ser, en realidad, una leyenda urbana. Pero, en general, se acepta que los griegos antiguos sí sabían que la Tierra era una esfera y que hicieron un cálculo bastante aproximado.

Colón conocía esta información, pero decidió confiar más en otras estimaciones sobre el tamaño de nuestro planeta. Un erudito llamado

Marino de Tiro, hacia finales del siglo I d. C., había estimado que la masa continental euroasiática ocupaba unos 225 grados de la superficie terrestre, lo que hacía al planeta mucho más pequeño que en otras estimaciones antiguas. No deberíamos ser demasiado duros con Marino: también hizo la valiosa contribución de proporcionar por primera vez las coordenadas de latitud y longitud para identificar lugares en un mapa, una herramienta inestimable para los futuros cartógrafos.

Pero, como seguramente has oído, cuando Colón llegó a América, tomó esto como confirmación de que la estimación más pequeña de Marino era correcta y asumió que había llegado a Asia oriental. La mayoría de los relatos sobre Colón terminan allí, con él engañado hasta el final de sus días, pensando que había demostrado la teoría de la Tierra más pequeña. Pero hay un detalle más que quizá no conozcas. En sus últimos años, Colón examinó muchos datos de diversos viajes, incluido el suyo propio a Sudamérica en su tercer viaje. Estos datos adicionales, sumados a la cantidad de agua dulce que vertían los ríos en el Atlántico, lo convencieron de que había encontrado otro vasto continente, contradiciendo su confirmación anterior del tamaño reducido de la Tierra.

¿Cómo reconcilió esto con sus creencias? Decidió que el planeta no podía ser una esfera en absoluto, sino que debía tener forma de pera, con un gran bulto que se extendía en algún lugar cerca de China para dar cabida a una nueva masa de tierra. De regreso en Europa, fue ampliamente ridiculizado por esta extraña idea. Irónicamente, hoy sabemos que tenía razón en que la Tierra es ligeramente achatada en forma de pera, aunque abultándose de un modo diferente al que él esperaba: el hemisferio sur es un poquito más “gordo” que el norte. Pero es una diferencia relativamente diminuta en comparación con lo que Colón imaginaba, por lo que no queda plenamente reivindicado por este conocimiento moderno.

¿Dónde estoy?

Del pódcast Mutación matemática 108

En estos días modernos de fotos satelitales y sistemas de posicionamiento global, damos por hecho que, estemos en casa, en un barco o en un avión, podemos prácticamente siempre saber dónde estamos en el planeta. Dos números describen siempre nuestra ubicación: la latitud, que indica cuán al norte o al sur estamos, y la longitud, que especifica nuestra posición este-oeste. Pero ¿alguna vez te has preguntado cuándo fue que la gente adquirió la capacidad de calcular estos números mientras viajaba?

En particular, en un barco de tiempos premodernos, cuando no se veía nada más que agua en todas direcciones, conocer la latitud y la longitud era cuestión de vida o muerte. Sorprendentemente, aunque la latitud podía calcularse desde la antigüedad, el problema de la longitud no se resolvió hasta el siglo XVIII. Esta asimetría puede parecer un poco extraña al principio, pero si lo piensas un momento verás el problema: mientras que personas en dos latitudes diferentes observarán vistas claramente distintas de las estrellas en la noche, personas en distintas longitudes verán las mismas vistas, solo que en momentos distintos, debido a la rotación de la Tierra.

Entonces, ¿cómo se resolvió el problema de la longitud? Ya en el siglo II a. C., el astrónomo griego Hiparco reconoció que, si se pudiera calcular con precisión la hora actual en un lugar conocido y compararla con la hora del día en tu ubicación actual, eso daría una medida exacta. Pero no era tarea fácil construir un reloj mecánico que funcionara en las caóticas y constantes condiciones de movimiento en el océano, y muchos sospechaban que era un sueño imposible. Durante mucho tiempo, los marineros se limitaron a la “estima” o dead reckoning, calculando en base a la velocidad estimada del barco cuánto tiempo había pasado. Esto a menudo llevaba a errores acumulativos, y días o semanas extra en el mar significaban un riesgo creciente de naufragios, hambre o muerte por escorbuto. Reconociendo las consecuencias fatales de los errores de cálculo, varios gobiernos europeos empezaron

a ofrecer lucrativos premios en los siglos XVII y XVIII a quien encontrara un método preciso para medir la longitud.

Los británicos incluso crearon un organismo oficial, la Board of Longitude (Junta de Longitud), para examinar las diversas soluciones y administrar el gran premio. Como era de esperar, al igual que en las oficinas modernas de patentes, esto hizo que aparecieran toda clase de excéntricos convencidos de que eran genios que habían salvado al mundo. Alguien llamado Owen Straton intentó reclamar el premio presentando un reloj de sol. La poco práctica solución de Halandby consistía en asegurarse de viajar siempre en un ángulo exacto de 45 grados noroeste, suroeste, noreste o sureste, sin importar la corriente oceánica, y luego reutilizar el cálculo de la latitud. El profesor lucasiano William Whiston propuso otro plan impráctico: anclar barcos de manera permanente a intervalos regulares a lo largo del Atlántico y hacerlos lanzar fuegos artificiales a horas conocidas. Probablemente la idea más ridícula fue la del semimágico "polvo de simpatía", en la cual un vendaje que había estado en un perro herido sería pinchado a determinadas horas, y el perro sentiría la herida de nuevo sin importar lo lejos que estuviera. Umberto Eco se burló de esta idea en su novela clásica La isla del día de antes.

Pero entre todo ese barullo había algunos métodos prácticos. Galileo había observado en 1612 que, debido a la órbita regular de las cuatro lunas de Júpiter, Júpiter mismo era una especie de reloj universal: observando las posiciones relativas de sus lunas, siempre se podía saber la hora exacta. Esto funcionaba bien en tierra firme, pero observar las lunas de Júpiter desde la cubierta de un barco del siglo XVII era casi imposible, incluso con el ingenioso aparato inventado por Galileo, que intentaba usar capas de conchas separadas por aceite para permitir que un observador se mantuviera estable en una embarcación en movimiento.

Relacionado con este método está el de las distancias lunares, que usaba la posición exacta de la Luna para identificar la hora actual. Fue propuesto ya en 1514 por Johannes Werner, pero no se volvió práctico hasta la publicación del Nautical Almanac de Nevil Maskelyne en 1767, que contenía tablas detalladas de las posiciones lunares. Todavía sufría del laborioso requisito de hacer una observación local de la posición de

la Luna respecto al Sol o a una estrella conocida, pero en cierto grado era un método viable.

El problema fue verdaderamente resuelto por el carpintero británico John Harrison, el primero en idear un cronómetro práctico que pudiera dar la hora exacta incluso en el mar. Harrison fue un relojero autodidacta, del que se dice que aprendió sobre los relojes a los seis años, mientras se entretenía con un reloj de bolsillo estando en cama con viruela. Realmente dominó su oficio; según fuentes en línea, uno de sus relojes originales de la década de 1720 aún funciona hoy. Creó numerosas innovaciones en el diseño de relojes, como sistemas de contrapesos para compensar el movimiento náutico, y el péndulo de rejilla y la tira bimetálica para compensar los cambios de temperatura. Demostró por primera vez un cronómetro marino exitoso en 1736. Recibió diversas subvenciones provisionales para continuar su trabajo, pero tuvo la mala fortuna de que Nevil Maskelyne, famoso contribuyente al método de las distancias lunares, fuera nombrado Astrónomo Real antes de que Harrison pudiera recibir formalmente el Longitude Prize. Maskelyne saboteó la prueba oficial del cronómetro "H4" de Harrison, irónicamente el mismo diseño usado con éxito en la práctica por el famoso explorador James Cook, distorsionando la presentación de los resultados. Finalmente, los logros del anciano Harrison fueron reconocidos mediante una Ley del Parlamento en 1773, aunque nunca se le otorgó el premio oficial de la longitud.

Dado que los cronómetros de Harrison eran inicialmente costosos, el método laborioso y menos preciso —pero aún útil— de las distancias lunares siguió siendo popular hasta mediados del siglo XIX, y solo fue sustituido gradualmente a medida que el precio de los cronómetros descendió a niveles accesibles. Y hoy todos estamos familiarizados con las diversas tecnologías modernas que finalmente hicieron innecesarios a los cronómetros, pese a su condición de maravillas de la tecnología mecánica premoderna.

Poniendo a trabajar al multiverso

Del pódcast Mutación matemática 31

La computación cuántica es una nueva forma de cálculo que puede poner de cabeza muchas de nuestras suposiciones habituales sobre qué problemas son resolubles. Para ciertos tipos de cálculos, las computadoras cuánticas permiten realizar una cantidad exponencial de operaciones en tiempo polinómico. Cuando decimos que un cálculo requiere trabajo "exponencial", significa que la cantidad de trabajo necesaria para resolver un problema de tamaño n es aproximadamente proporcional a 2^n. Dado que se estima que hay solo alrededor de 2^{260} átomos en el universo observable, esto significa que tales problemas rápidamente se vuelven irresolubles para la mayoría de los fines prácticos. Entonces, ¿cómo puede una nueva forma de computadora abordar este problema?

Para captar la idea básica, repasemos el concepto de bits, los 1 y 0 que representan la información en una computadora estándar. Si tienes un elemento de memoria de 2 bits, puede tener uno de cuatro valores: 00, 01, 10 o 11. Pero en una computadora cuántica, los elementos básicos son algo llamado qubits. Los qubits pueden estar en una superposición de múltiples estados a la vez: así que, en lugar de estar en uno de esos cuatro estados definidos, un elemento de memoria de 2 qubits está en un estado de A veces 00 + B veces 01 + C veces 10 + D veces 11, donde A, B, C y D son probabilidades complejas. Un conjunto de n qubits, por lo tanto, representa un conjunto de 2^n coeficientes, una cantidad exponencial de información. Para realizar cálculos con tales elementos, se usan las leyes de la física cuántica para hacer que los conjuntos completos de coeficientes de diferentes elementos de memoria interactúen, resultando finalmente en una superposición que representa una respuesta correcta con una probabilidad cercana a 1.

Entonces, ¿significa esto que todos nuestros problemas de cálculo están ahora resueltos? Bueno, no del todo. El conjunto de interacciones físicas disponibles en las computadoras cuánticas es muy limitado, de modo que no pueden resolverse problemas exponenciales arbitrarios:

solo ciertos problemas que encajan dentro de las posibles interacciones. Uno de los problemas que sí se ha demostrado que puede resolverse en estas computadoras es el factoreo de números grandes —y muchos algoritmos modernos de encriptación, incluido el popular algoritmo RSA, se basan en que tal factoreo es difícil. Como resultado, si una computadora cuántica práctica apareciera repentinamente en el mercado, ¡muchos de nuestros sistemas de seguridad informática quedarían comprometidos de inmediato! Pero no necesitas cancelar todas tus cuentas electrónicas todavía, ya que nadie ha construido una computadora cuántica comprobada con más de un puñado de qubits.

Lo que encuentro más interesante acerca de las computadoras cuánticas es que el físico David Deutsch ha argumentado que apoyan la "interpretación de los muchos mundos" de la física cuántica. La interpretación de los muchos mundos sostiene que la superposición de muchos estados posibles de una partícula cuántica representa, en realidad, el hecho de que existen muchos universos paralelos, un número exponencial de ellos, y que en cada uno la partícula adopta un estado distinto. Los universos paralelos cercanos son como el nuestro, excepto por pequeñas variaciones cuánticas: hay un número exponencial de otras versiones de ti leyendo este libro ahora mismo.

Algunas de ellas incluso lo están disfrutando. Este concepto de múltiples universos paralelos parece un poco difícil de tragar, especialmente dado el enorme número implicado. Martin Gardner ridiculizó célebremente esta idea cuando preguntó: "¿Son los universos más abundantes que las moras?". Sin embargo, al ver el problema desde la otra dirección, ¿qué significaría que se produjera una computadora cuántica exitosa a gran escala? Deutsch señala que podría tomarse como un fuerte argumento de que la existencia de múltiples universos ha quedado probada. En esta interpretación, las ecuaciones de la física cuántica que describen el estado de una partícula representan la interacción entre nuestro universo y los muchos universos paralelos cercanos en los que existe esa partícula. Para que una computadora cuántica resuelva un problema práctico que requeriría una cantidad exponencial de trabajo clásico, el trabajo tiene que hacerse en alguna parte: ¿cómo puede una simple partícula estar realizando por sí sola una cantidad exponencial de cálculos? Si una computadora cuántica

realmente tiene éxito, eso podría constituir evidencia de que un número exponencial de universos ha sido aprovechado para realizar nuestro cálculo.

Estoy seguro de que no estoy haciendo plena justicia al argumento de Deutsch aquí, pero te animaría a leer más en su excelente libro The Fabric of Reality.

CAPÍTULO 6

La mente matemática

Las matemáticas son una de las pocas actividades puramente mentales que los seres humanos podemos emprender; aunque tendemos a usarlas como una herramienta para analizar el mundo que nos rodea, en realidad tienen lugar enteramente en nuestra mente. Esta observación es especialmente importante cuando intentamos comprender el mundo de los savants autistas, personas con una función mental deteriorada en algunas áreas que parecen ser genios matemáticos en otras. Verás varios artículos aquí relacionados con estos procesos de pensamiento savants, que siempre me han intrigado.

Más allá de esto, hay preguntas sobre cómo entender nuestra mente en general: ¿somos simplemente un conjunto de funciones matemáticas flotando en nuestro cerebro? ¿Cómo logra una masa de células como nuestro cerebro comprender las matemáticas? También hay muchas ideas sobre cómo usar las percepciones matemáticas para mejorar todos nuestros procesos de pensamiento, ya sea cambiando nuestro uso del lenguaje o mediante otros medios. En este capítulo examinaremos estas diversas perspectivas sobre nuestro funcionamiento mental desde distintos ángulos.

¿De qué color es este pódcast?

Del pódcast Mutación matemática 6

Recientemente estuve leyendo en línea sobre la “sinestesia”, un fenómeno donde los sentidos se mezclan. Por ejemplo, alguien puede afirmar que ciertas notas de piano provocan distintos olores, o que ver ciertas formas les genera un sabor extraño en la boca. Una posible forma de esta condición es cuando la gente afirma que “ve” cada número con un color particular. Por ejemplo, para un sinestésico, todos los 2 podrían parecer verdes, mientras que todos los 3 parecerían azules.

Como la mayoría de ustedes, yo era algo escéptico al escuchar esto por primera vez. Supuse que era solo un caso de tipos artísticos pretenciosos tratando de sonar raros y misteriosos, o queriendo ser poéticos. Esta opinión se reforzaba por el hecho de que uno de los sinestésicos más famosos fue el autor Vladimir Nabokov, un favorito entre los autoproclamados intelectuales y académicos literarios. Pero recientemente leí en Scientific American en línea acerca de un ingenioso experimento que parece refutar esta teoría, y demostrar que algunas personas realmente ven cada número como un color diferente.

Así es como funciona. El científico imprime una hoja de papel con mayormente 5, pero con algunos 2 mezclados. Los 2 están dispuestos de modo que formen un patrón reconocible, como un triángulo. Para la gente normal, será muy difícil distinguir el patrón a simple vista, y tendrán que mirar durante mucho tiempo para identificar los números individuales. Pero para un sinestésico, dado que los 2 y los 5 son de diferentes colores, el patrón es obvio, y deberían detectarlo de inmediato. Si logran pasar esta prueba, un sinestésico puede afirmar de manera plausible que realmente está viendo los números como colores distintos, y no simplemente eligiendo describirlos con un lenguaje figurativo. En numerosos ensayos, la mayoría de los autoproclamados sinestésicos realmente pasaron esta prueba.

Así que la conclusión es: los sinestésicos realmente experimentan el mundo de manera diferente. Esos tipos artísticos que afirman ser sinestésicos no solo están fingiendo ser raros y misteriosos: en al menos algunos casos, son raros y misteriosos. Y para algunos de ellos, cada número realmente tiene su propio color.

Computadoras en el cerebro

Del pódcast Mutación matemática 48

Ahora que hemos establecido que la sinestesia es real, y no solo un intento de metáfora o poesía, surge otra pregunta: ¿hay casos en los que esto podría ser lo bastante poderoso como para proporcionar una ventaja significativa en una carrera científica o de ingeniería? Si un pequeño grupo de personas tiene distintas partes del cerebro conectadas de manera cruzada, donde diferentes sentidos se asocian con números, letras o conceptos, es lógico pensar que podría haber casos en los que esto funcione como una poderosa herramienta práctica.

En esta línea, me sorprendió leer en un número reciente de la revista Chip Design sobre otra forma de sinestesia: ciertos ingenieros ven diferentes partes de los esquemas de chips de computadora en varios colores. Debería dar un poco de contexto primero, para quienes no ayudan a diseñar microprocesadores para ganarse la vida. Al diseñar un microprocesador, los ingenieros usan diferentes tipos de símbolos básicos, o “puertas lógicas”, para representar conjuntos de transistores que realizan tareas comunes. Un ejemplo es la puerta AND, que tiene dos cables de entrada y un cable de salida. El cable de salida tendrá un valor de 1 si ambas entradas fueron 1, y de lo contrario tendrá un valor de 0. De manera similar, una puerta OR da un valor de 1 si cualquiera de sus entradas fue 1. Una puerta NOT, o inversor, es aún más simple, pues siempre genera un 1 si su única entrada fue 0, y viceversa. Al ver un esquema de diseño, un ingeniero normalmente estará mirando un mar de símbolos que representan puertas AND, OR, NOT y otras más complejas.

Según este artículo, un ingeniero sinestésico entrevistado puede ver las puertas AND como amarillas y las puertas OR como verdes. Al principio uno podría sospechar que, más que reaccionar a la función lógica de las puertas, simplemente percibe las formas usadas para representarlas, ya que una forma bien conocida de sinestesia asocia formas con colores. Pero el ingeniero insistió en que ese no era el caso:

por ejemplo, el símbolo normalmente usado para un inversor es un triángulo con un pequeño círculo al final. Pero los triángulos también pueden aparecer como partes de símbolos más complejos, y en esos casos no ve los mismos colores, ni tampoco cuando las mismas formas aparecen por casualidad en un papel. Así que, de alguna manera, la parte de su cerebro que entiende la lógica de los esquemas de chips parece estar conectada de forma cruzada con la parte que percibe los colores. ¡Esto puede ser bastante útil para un ingeniero que trabaja con esquemas!

Si lo piensas bien, esto también podría añadir una nueva dimensión a nuestra comprensión de la computación y de nuestro cerebro. Siempre había pensado que los números y las formas se heredan directamente del mundo natural, así que no es demasiado sorprendente que nuestro cerebro pueda exhibir comportamientos extraños como la sinestesia relacionados con ellos. Algo en estos conceptos parece ser fundamentalmente parte de la naturaleza; incluso si los humanos nunca hubieran evolucionado, los números y las formas seguirían existiendo de alguna manera. Pero las puertas lógicas usadas para diseñar computadoras parecen una compleja invención humana —claro, modelan formas básicas de la lógica matemática, pero de una manera no fácilmente encontrada en la naturaleza. Así que me parece que el hecho de que estas formas también estén sujetas a sinestesia indica que, de alguna manera, los conceptos de computación son realmente tan básicos para nuestro cerebro como los números.

El secreto de Rain Man

Del pódcast Mutación matemática 10

Seguramente has oído hablar de los savants autistas, a veces llamados “idiot savants” por los políticamente incorrectos. Son personas que apenas pueden desenvolverse en el mundo real, pero que de algún modo logran realizar cálculos matemáticos asombrosos en su cabeza. Durante mucho tiempo fue un completo misterio cómo lograban estas hazañas mentales. Pero recientemente, un savant autista de alto funcionamiento llamado Daniel Tammet escribió unas memorias fascinantes, donde describe sus métodos. A Tammet se lo ha llamado la “Piedra de Rosetta” de los savants, ya que es uno de los pocos que posee estos talentos y, además, es capaz de comunicarse lo bastante bien como para explicar cómo lo hace. La clave reside en el fenómeno de la sinestesia.

Básicamente, el cerebro de Tammet está cableado para percibir los números de una manera diferente: cuando piensa en un número o lo lee, experimenta formas, sonidos y olores únicos para ese número. No es que haga un esfuerzo consciente por visualizar estos aspectos, ni que esté recordando experiencias pasadas: esas sensaciones son reales para él. Al describir sus percepciones de los números, dice: “Cada uno es único y tiene su propia personalidad. El número 11 es amistoso y el 5 es ruidoso, mientras que el 4 es tímido y callado: es mi número favorito, quizá porque me recuerda a mí mismo”. En una ocasión le dijo a David Letterman que le recordaba al número 117. Más adelante, Tammet escribió que tiene respuestas visuales y, a veces, emocionales para cada número hasta el 10.000.

¿Y cómo lo ayuda esto con los cálculos aritméticos? Bueno, según él, puede multiplicar visualizando las formas de dos números, que luego cambian y hacen aparecer una tercera forma. De esa nueva forma puede leer la respuesta. La división, de algún modo, produce espirales giratorias en su cabeza, que puede leer con precisión hasta casi 100 decimales. Los números primos tienen una cualidad suave, redondeada, “como de guijarro”, lo que le permite reconocer todos los primos hasta

el 9.973.

Lo que resulta aún más interesante es cómo usa los números como sustitutos de emociones, algo que la mayoría de los autistas encuentra difícil de comprender o de relacionar. Cuando un amigo está triste o deprimido, piensa en el número 6, que describe como "pequeños puntos negros". Para entender el concepto de sentirse intimidado por algo, se imagina de pie junto al número 9, que es muy alto. Cuando está infeliz o ansioso, cuenta en su cabeza, y los patrones formados por los números lo ayudan a tranquilizarse.

Una persona razonable podría preguntarse si Tammet simplemente está inventando todo esto. Pero es una fuente bastante creíble: una vez recitó π con 22.514 decimales bajo condiciones controladas, estableciendo un récord europeo. Por desgracia, suponiendo que diga la verdad, parece que sus habilidades están fuera del alcance del resto de nosotros. Pero sin duda son fascinantes de leer: si disfrutas pensando en este tema, asegúrate de echarle un vistazo a sus memorias superventas, Born on a Blue Day.

Míralo a los ojos

Del pódcast Mutación matemática 119

El libro de Daniel Tammet, del que hablamos en la sección anterior, resulta ser solo un representante de una pequeña industria de memorias de personas en el espectro autista. Recientemente leí otra: Look Me in the Eye, la autobiografía de un tal John Elder Robison, con la forma leve de autismo conocida como síndrome de Asperger. A pesar de, pero también gracias a, su condición, Robison llevó una vida bastante colorida: pasó de ser un desertor escolar, a técnico de gira de KISS, a ingeniero profesional, y finalmente se asentó como mecánico de autos y empresario.

Como mencioné, Robison padece el síndrome de Asperger, un trastorno leve dentro del espectro autista. Siempre le resultó difícil conectar emocionalmente con otras personas, saber qué decir en situaciones sociales o mirar a los demás a los ojos durante una conversación. Trató de enfrentarse a esto de varias maneras. En el nivel más simple, intentó inventar algoritmos matemáticos para saber qué decir en respuesta a los comentarios de los demás. Esto a menudo funcionaba, pero a veces llevaba a resultados embarazosos. Por ejemplo, en un incidente, una conversación sobre alguien que tenía una aventura activó en él la respuesta de "preguntar los nombres de personas no identificadas", lo que generó preguntas que parecían groseras y entrometidas.

Pero también encontró una manera inusual de lidiar con ello, que lo llevó a ser un poco más popular socialmente que muchos otros con su condición: las bromas pesadas. Si lo piensas, tiene cierto sentido: no podía averiguar qué era lo apropiado hacer o decir en la mayoría de las situaciones sociales, así que le resultaba mejor hacer intencionalmente cosas que eran absurdamente inapropiadas. Algunas de sus clásicas incluían convencer a los amigos de sus padres en una fiesta de que era un basurero corrupto que recaudaba pagos para la mafia, y arreglar que varias toneladas de grava fueran entregadas desde una cantera a la entrada de la casa de un profesor.

Como muchos con su condición, también tenía fuertes talentos matemáticos que desarrolló desde muy joven. Tras descubrir equipos musicales, pronto se dio cuenta de que tenía un don para entender cómo los amplificadores producían sonidos: podía visualizar las ondas sonoras creadas por distintos componentes electrónicos, y así modificar un amplificador para generar efectos de sonido deseados. Esto lo llevó a conexiones en la escena musical local y a trabajos pagos reparando equipos de sonido después de abandonar la escuela secundaria. Finalmente fue descubierto por la banda de rock KISS. Sí, los KISS, los tipos del maquillaje loco. Creó numerosas guitarras con efectos especiales para ellos, usando sus dones electrónicos. Pero con el tiempo se dio cuenta de que no era un estilo de vida muy estable.

Cuando solicitó un trabajo corporativo, sus asombrosas percepciones sobre la electrónica impresionaron lo suficiente a Milton-Bradley como para contratarlo como ingeniero de diseño, a pesar de su falta de formación académica formal. Fue bastante exitoso como ingeniero, pero tras ser ascendido a gerente se dio cuenta de que no encajaba en el mundo corporativo. Regresó a su ciudad natal y abrió un taller de reparación de autos. Nuevamente, su talento innato para los problemas electrónicos y mecánicos dio frutos, ya que se hizo conocido como el mecánico de último recurso que podía resolver fallas en autos extranjeros de alta gama que dejaban perplejos a la mayoría de los servicios convencionales.

Creo que lo más interesante de leer biografías como la de Robison y Tammet es darse cuenta de que existe en realidad una especie de continuo entre las personas normales, o “neurotípicas” en la jerga actual, y las personas con Asperger y formas más graves de autismo. Pienso que las características que a menudo se etiquetan como “nerd” están en algún punto de esa línea: aunque yo no padezca Asperger ni nada parecido, pude reconocer algunas de mis propias luchas pasadas cuando Robison describía sus desafíos para desenvolverse en situaciones sociales. Y creo que cualquiera de nosotros en campos matemáticos, científicos o de ingeniería nos hemos encontrado trabajando o estudiando con personas que están cerca del punto de Robison en el espectro autista. Recomiendo mucho leer los libros de Robison y Tammet para comprender mejor a nuestros colegas y darnos

cuenta de que, bajo todo ese comportamiento extraño, no son en realidad tan distintos de nosotros.

Los savants también son personas

Del pódcast Mutación matemática 97

Últimamente he estado leyendo el segundo libro de Daniel Tammet, Embracing the Wide Sky, un relato fascinante de ideas e investigaciones recientes sobre cómo funciona la mente, salpicado de percepciones de Tammet basadas en sus propios patrones de pensamiento inusuales. Un aspecto importante de este nuevo libro es su firme convicción de que las mentes autistas como la suya no son fundamentalmente diferentes de las de otras personas: usa las mismas facultades que todos los demás, solo que con ciertas partes más fuertes y otras más débiles que la población general. En particular, discrepa enérgicamente de la noción de los savants autistas como "computadoras humanas".

Por ejemplo, muchos de nosotros obtuvimos nuestras ideas sobre personas como Tammet de la película Rain Man, que expuso el concepto de los savants autistas a un público amplio. En una escena famosa, el personaje autista de Dustin Hoffman ve a alguien tirar una caja de fósforos, e instantáneamente cuenta cuántos hay en el suelo. Esto se inspiró en un relato de las memorias psicológicas de Oliver Sacks, El hombre que confundió a su mujer con un sombrero, donde entrevistó a un par de gemelos savants, quienes efectivamente dijeron el número de fósforos que habían caído de la caja. Pero Tammet señala que, si esos fósforos estaban en la mesa de los gemelos, es muy probable que ya supieran cuántos contenía la caja: incluso si el número no estaba escrito en el exterior, podían contarlos a su antojo, algo nada improbable para ellos. Además, si caen más de 100 fósforos, es prácticamente seguro que la vista de algunos quedará obstruida, lo que hace muy improbable que incluso una computadora sofisticada pudiera dar el número exacto observando solo los fósforos caídos. Además, ningún estudio científico controlado ha encontrado jamás un savant con esa habilidad de contar al instante, pese a que han demostrado muchas otras capacidades.

Tammet también señala que, en su mente, el número 111 —que era la cantidad de fósforos que los gemelos de Sacks contaron— es un número muy bello: la simetría natural de los tres unos, el hecho de que

sea divisible por tres y que sea múltiplo de 37 son cosas muy interesantes. Con su sinestesia, que recordarás es su capacidad de "ver" los números como formas y colores, el 111 es "lleno de una hermosa luz blanca brillante". Así que Tammet cree que la explicación más probable es que los gemelos contaron los fósforos en algún momento antes de la entrevista, y no tuvieron problema en recordar este número especialmente interesante que coincidía con el conteo.

Además, Sacks habló de otras hazañas matemáticas increíbles de los gemelos: otro ejemplo notable es su juego de mencionarse números primos grandes entre sí. Sacks afirma haber confirmado la exactitud de sus primos de hasta 10 dígitos consultando un texto de matemáticas que contenía los primos. Pero un libro que incluyera todos los primos de hasta 10 dígitos contendría más de 400 millones de números. Cuando se enfrentó a esta crítica, Sacks respondió que desde entonces había perdido el libro que usó, por lo que su afirmación convenientemente no podía verificarse. En general, Sacks parecía especialmente predispuesto a considerar a los gemelos autistas como algo vagamente no humano, describiéndolos como "una especie de grotescos Tweedledee y Tweedledum". Partiendo desde el principio con la intención de retratarlos de esa manera, no es sorprendente que viera todo lo que hacían como una confirmación adicional de su rareza. Tammet obviamente se siente ofendido por esta caracterización, como debería ser.

En cuanto a sus propios logros, Tammet señala que su hazaña de recitar decimales de π no fue algo completamente calculado de manera automática por su mente subconsciente, sino el resultado de varias semanas intensas de estudio y práctica constantes. Sus habilidades sinestésicas ciertamente ayudaron, pero no reemplazaron la necesidad de pensar cuidadosamente en las matemáticas que estaba intentando. Así que, aunque brillante, con una memoria excelente y una capacidad sinestésica fuera de lo común, Daniel Tammet sigue siendo un hombre, y no una máquina.

El cerebro desinhibido

Del pódcast Mutación matemática 99

Como comentamos en la sección anterior, en su segundo libro de memorias Embracing the Wide Sky, Daniel Tammet sostiene que no es una "computadora humana". Sin embargo, esto deja abierta la pregunta de cómo explicar su extraña condición. Él tiene una teoría al respecto: el síndrome savant resulta de una falta de inhibición en la comunicación entre distintas partes de su cerebro. Dicho de otro modo, partes del cerebro que en las personas normales permanecen separadas, en gente como él están en comunicación constante, lo que da lugar a sus extraordinarias habilidades matemáticas.

Para empezar a comprender esto, repasemos la primera parte de su explicación: la sinestesia. Esto significa que, cuando ve o escucha un número, también percibe en su mente formas y colores asociados. Por ejemplo, describe a los números primos como si tuvieran una cualidad suave, "como de guijarro", y dice que David Letterman le recuerda al número 117. Puedes ver por qué esto le da una memoria excelente para los números y sus propiedades: una técnica mnemotécnica común consiste en visualizar imágenes asociadas a lo que quieres recordar, y para él eso ocurre de forma natural con los números.

Pero la parte más novedosa de la tesis de Tammet es que esta sinestesia no es la causa raíz de sus habilidades, sino un síntoma de una causa más profunda: la falta de inhibiciones entre partes de su cerebro. Por ejemplo, piensa en lo que ocurre en una mente normal como la tuya cuando escuchas la palabra "jirafa". Te viene a la cabeza una avalancha de asociaciones: la imagen visual del animal, conceptos como "alto", "mamífero" y "cuello largo", etc. Con los números, esto no pasa: si te preguntan qué piensas al escuchar "23", quizá pienses en 22 o en 24, pero no se te ocurrirán muchas relaciones semánticas interesantes.

Para Tammet, en cambio, las habilidades asociativas ordinarias que la gente tiene naturalmente con el lenguaje también se extienden a las partes matemáticas de su mente. Cuando escucha "23", le vienen a la cabeza sin esfuerzo todo tipo de cosas: su cuadrado, 529; su múltiplo de

tres cifras más grande, 989; y el hecho de que es primo. Del mismo modo que una persona normal tiene un vocabulario lingüístico intrincadamente conectado de miles de palabras y conceptos que puede asociar sin esfuerzo, Tammet vive esa situación con los números: su "vocabulario" básico cubre todos los números menores de 10.000, además de una buena selección de otros interesantes más allá de ese rango.

¿Cómo le permite esto hacer trucos matemáticos nuevos, como decidir si un número de 6 cifras es primo? La clave es que usa sus conexiones internas para inferir propiedades adicionales. Él lo compara con encontrar palabras en una partida de Scrabble: si tienes las fichas adecuadas, podrías suponer que "agedness" es una palabra y jugarla, aunque nunca la hayas visto escrita. De manera análoga, un número puede "parecerle" primo, lo piensa un poco y concluye tentativamente que ha hallado un número primo nuevo. Igual que al reconocer que la palabra base aged más el sufijo ness probablemente es una combinación válida, él puede descomponer partes de un número y ver si se combinan de un modo que tiene un significado especial. Por ejemplo, mira el 84.187. Él puede ver de inmediato que las tres primeras cifras forman 841, o 29 × 29, y las dos últimas forman 87, o 3 × 29; así, reconoce instantáneamente que 84.187 no es primo. Para reconocer un número primo grande, contempla su "forma" en su mente durante unos minutos y ve si se le ocurre algún factor: si no aparece ninguno, probablemente es primo.

Una consecuencia interesante de esto, y otra refutación de la idea de los savants como computadoras humanas, es que no es raro que un savant etiquete erróneamente un número grande como primo si sus factores son difíciles de encontrar. Por ejemplo, cuando se le pidió hallar un primo entre 10.500 y 10.600, un savant respondió enseguida con 10.511, que "parece" primo para la mente de un savant, ya que no muestra factores obvios ni una estructura inmediata que revele divisibilidad por algún número menor. Pero en realidad 10.511 es el producto de 23 y 457.

Así que, si la teoría de Tammet es correcta, gran parte del secreto de los savants autistas es que las partes del cerebro que manejan el sentido numérico y el sentido del lenguaje fluyen juntas, haciendo que

los números traigan consigo la avalancha de asociaciones que otros suelen experimentar como parte del procesamiento del lenguaje. Y aunque quizá envidies esas habilidades, cuidado: esto también puede ser una explicación parcial de los problemas psicológicos del autismo, ya que la sobrecarga sensorial resulta simplemente demasiado difícil de procesar para una mente normal. Y, por desgracia, la mayoría de los autistas con estas capacidades savant no tienen la suerte de ser tan funcionales como Daniel Tammet.

Un lenguaje lógico

Del pódcast Mutación matemática 192

Si hablas inglés —lo cual es probable—, es posible que en algún momento te hayas sentido frustrado por lo arbitrario que es, y por las dificultades y ambigüedades que esto a veces genera. ¿Por qué hay tantas formas de escribir "their/there"? ¿Por qué deberías trabarte la lengua si quieres vender sea shells by the seashore?[5] ¿Y por qué, si hablas de una little girls' school, los oyentes deberían confundirse sobre si son pequeñas las niñas o la escuela? Quizá no te sorprenda saber que el deseo de un lenguaje humano más bien definido y matemáticamente sólido existe desde hace mucho. De hecho, han pasado más de 50 años desde que el Dr. James Cooke Brown definiera por primera vez el idioma Loglan, una lengua humana nueva basada en los conceptos matemáticos del cálculo de predicados. Iteraciones posteriores de este idioma, tras una lucha política interna contra el Dr. Brown por parte de entusiastas del lenguaje, pasaron a llamarse Lojban. En teoría, se afirma que Lojban, a diferencia del inglés y de otros idiomas naturales, es mínimo, regular y no ambiguo.

¿Cómo se define Lojban como un idioma tan limpio? Primero hicieron una cuidadosa elección de fonemas, sonidos básicos, seleccionados entre los más comunes en una variedad de lenguas del mundo. Cada fonema distintivo está asociado a símbolos definidos de forma única, eliminando cualquier posible confusión sobre cómo pronunciar una palabra: su sonido está completamente determinado por su ortografía. Después definieron un conjunto de unas 1.350 palabras raíz fonéticamente deletreadas usando esos fonemas, cuidando de no crear homónimos ni sinónimos que pudieran causar confusión. La cantidad de letras en una palabra y su patrón consonante-vocal determinan qué tipo de palabra es: por ejemplo, una palabra de dos letras con una consonante seguida de una vocal es un operador simple, mientras que las de cinco letras son lo que se conoce como "predicados". Sustituyendo muchos aspectos de sustantivos y verbos de los idiomas tradicionales, la formación de oraciones se basa en los

predicados, que son en muchos sentidos análogos a los predicados lógicos de las matemáticas. Por ejemplo, el predicado tavla significa “x1 habla con x2 sobre x3 en el idioma x4”, siendo x1, x2, x3 y x4 huecos que pueden llenarse con otras palabras de Lojban.

Para entender mejor cómo funciona esto, veamos un ejemplo específico. Antes mencioné la frase “That’s a little girls’ school”, que en inglés es ambigua: ¿es una escuela para niñas pequeñas, o una escuela pequeña para niñas? En Lojban, si es la escuela que es pequeña, la traducción es Ta cmalu nixli bo ckule. El predicado cmalu define que algo es pequeño. Nixli significa “niña” y ckule significa “escuela”. El conector bo agrupa las dos palabras adyacentes, como si se encerraran entre paréntesis en una ecuación matemática, mostrando que hablamos de una escuela para niñas, y que es ese conjunto lo que es pequeño. Alternativamente, si decimos Ta cmalu bo nixli ckule, los paréntesis virtuales estarían alrededor de cmalu (“es-pequeña”) y nixli (“niña”), mostrando que lo que es pequeño son las niñas, no la escuela. Si no hubiera bo, hay un orden de operaciones determinista igual que en una ecuación matemática: siempre se agrupan las palabras más a la izquierda. Así que Ta cmalu bo nixli ckule y Ta cmalu nixli ckule son equivalentes. ¿Bastante simple, verdad? Bueno, quizá no tanto, pero después de mirarlo un rato empieza a tener sentido. Y elimina una ambigüedad que tenemos en inglés, al menos en este caso.

Los adeptos de estos lenguajes lógicos reclaman muchos beneficios potenciales de aprenderlos. Originalmente se desarrollaron para poner a prueba la hipótesis de Sapir-Whorf, que sostiene que el idioma principal de una persona puede determinar cómo piensa. Sea cual sea el mérito de esta idea, me cuesta ver a Lojban como una herramienta válida de prueba, salvo que un niño sea criado con él como lengua primaria sin aprender ningún idioma natural… lo que sería bastante cruel para ese niño, creo. Pero se le atribuyen muchas otras virtudes. Como el idioma es plenamente lógico, debería facilitar especificaciones técnicas e ingenieriles precisas; un objetivo con el que simpatizo, ya que en mi trabajo me enfrento con frecuencia al reto de interpretar especificaciones redactadas en inglés común. También se afirma que es un bloque de construcción hacia la Inteligencia Artificial, ya que su naturaleza lógica debería hacerlo más fácil de enseñar a una

computadora que los idiomas naturales. También se promociona como idioma internacional culturalmente neutral, aunque está muy lejos de opciones como el esperanto en popularidad. Y sus adeptos también lo disfrutan como un "juguete lingüístico" que ayuda a investigar aspectos del lenguaje al construir uno artificial.

En este punto debería añadir que tengo cierta perspectiva personal sobre la viabilidad de este enfoque en las especificaciones técnicas. Se afirma que la naturaleza lógica y precisa de Lojban significaría que, si los ingenieros lo aprendieran, todas nuestras especificaciones serían claras y no ambiguas, lo que llevaría a un gran aumento de la productividad. Pero yo trabajo en el área de Verificación Formal, donde tratamos de verificar diseños de chips, a menudo teniendo que convertir especificaciones en inglés común a formatos lógicamente precisos. Durante muchos años se propusieron distintos lenguajes de verificación para usar en especificaciones, muchos de ellos ofreciendo semánticas mínimas, muy lógicas y bien definidas. Pero los que más éxito tuvieron en la comunidad ingenieril y se convirtieron en estándares de facto no fueron los minimalistas elegantemente diseñados, sino los más flexibles, aquellos que añadían características que correspondían mejor a la manera en que los humanos piensan los diseños. Así que soy un poco escéptico respecto a que los ingenieros estén dispuestos a reemplazar el inglés por un idioma como Lojban solo para ganar más precisión lógica.

En cualquier caso, creo que el mayor fracaso de Lojban es que no hay suficiente gente dispuesta a aprenderlo. Tal vez las áreas del lenguaje en el cerebro humano no estén cableadas de una forma que apoye naturalmente el cálculo de predicados. Incluso la propia página lojban.org dice: "En cualquier momento dado, hay al menos 50 a 100 participantes activos… Un número de ellos puede mantener una conversación en tiempo real en el idioma". ¿O sea que, de 50 a 100 personas interesadas, solo una fracción puede realmente hablarlo? En comparación, el esperanto —un idioma artificial internacional creado por idealistas políticos a fines del siglo XIX— tiene decenas de miles de hablantes, y se estima que un millar lo aprendió nativamente desde el nacimiento. E incluso el klingon —una lengua artificial inventada para Star Trek y sin utilidad práctica alguna— se rumorea que tiene más

hablantes fluidos que el Lojban.

Así que, si quieres aprender una manera curiosa de pensar diferente sobre el lenguaje y hacerlo más matemáticamente preciso, adelante: visita el Instituto Lojban en línea y empieza tus lecciones. Pero si esperas que tus especificaciones de ingeniería sean más claras, comunicarte con tus vecinos o traer la paz mundial, no tienes suerte. Recuerda enseñar también inglés a tus hijos.

Cuando el “ser” no es

Del pódcast Mutación matemática 196

Aparte del esfuerzo de Lojban, otros han intentado soluciones más simples para mejorar la lógica en las lenguas naturales. Los seguidores del movimiento filosófico —casi sectario— conocido como Semántica General han ideado una forma de supuestamente mejorar el idioma inglés transformándolo en una nueva lengua llamada “E-prime”. Basan E-prime en la observación de que el uso deficiente y ambiguo del verbo to be (“ser/estar”) genera muchos problemas lógicos. Este verbo puede ocultar la suposición de una hipótesis lógica que necesita estar mejor fundamentada en las definiciones previas del hablante, y puede crear la ilusión de una observación fáctica cuando en realidad el autor solo está expresando una opinión o una conjetura. Así, eliminando por completo el uso de todas las formas del verbo to be, podríamos hablar de manera más lógica y consistente, y añadir claridad y rigor a nuestros procesos de pensamiento. Este cambio en el idioma también puede hacer que las afirmaciones y discusiones resulten menos dogmáticas, y algunos teorizan que incluso podría reducir los conflictos en las sociedades humanas. El nombre “E-prime” proviene de la ecuación E' = E – e, donde la E mayúscula representa el inglés completo, y la e minúscula representa el verbo to be.

Para hacernos una idea de los problemas que E-prime intenta resolver, veamos algunos ejemplos de enunciados ambiguos o ilógicos en inglés que esta reforma prohibiría. Supongamos que quieres decir: “Erik is a pódcaster”. ¿Quieres decir que Erik vive de hacer pódcast? ¿Que Erik graba pódcast como pasatiempo? ¿Que Erik pasa sus fines de semana de fiesta en una fraternidad apodada “los pódcasters”? Podrías estar queriendo decir cualquiera de esas cosas… o ninguna. Otro ejemplo viene de una cita clásica de Shakespeare: “To be or not to be, that is the question.” Todos sabemos lo que significa, refiriéndose a la lucha de Hamlet por decidir si suicidarse o no. Pero solo lo entendemos gracias al contexto obtenido de estudiar la obra en la escuela o de escuchar hablar sobre ella. ¿No sería mejor la cita si Shakespeare

hubiera escrito: “To live or to die, I ask myself this”? (Vivir o morir, yo me pregunto esto) Puede que discutas el valor poético de esta reformulación, pero creo que estarás de acuerdo en que comunica la idea con claridad, incluso a alguien que no tenga ningún contexto sobre Shakespeare o Hamlet.

Esta ambigüedad en el lenguaje surge del hecho de que el verbo to be puede tener muchos significados distintos en inglés. Puede significar identidad, pertenencia a una clase, predicación, existencia, localización, igualdad matemática, o funcionar como verbo auxiliar. Los defensores de E-prime ofrecen algunas sugerencias comunes para hacer más claros cada uno de estos tipos de enunciados. Por ejemplo, podemos reescribir las frases de título para incluir exactamente las credenciales que se afirman, sustituyendo “he is the landlord” (“él es el casero”) por “he owns the building and manages it” (“él es dueño del edificio y lo administra”). En afirmaciones matemáticas, usar el término preciso equals en lugar de is hace que las discusiones sean mucho más lógicas, y ayuda a distinguir las ecuaciones de las definiciones.

Algunos han alegado que, aunque estas críticas a la ambigüedad son válidas, eliminar por completo un verbo del idioma va demasiado lejos, y que deberíamos resolver estos problemas simplemente mejorando la disciplina general en el uso del lenguaje. Los defensores de E-prime tienden a admitir que esto tiene sentido en teoría, pero en la práctica la gente tiene demasiadas dificultades para aplicar esa disciplina en su escritura. Por ejemplo, un autor en la web escribió: “Después de siete años de experiencia con esta técnica, debo coincidir con el Dr. Kellogg (quien incluso habla en E-prime) en que, para funcionar efectivamente, E-prime requiere la eliminación total de las formas del verbo be, ya que las usamos de manera adictiva, incluso compulsiva, como atestigua su residuo subliminal incluso en terceros borradores. En una reciente incursión en el ciberespacio, por ejemplo, encontré una página web con cuatro frases ‘reescritas’ en E-prime: ¡dos de ellas contenían formas de be!”

Naturalmente, como cabría esperar de un movimiento que propone un cambio tan drástico, algunos miembros de la propia Semántica General también se han opuesto a la idea de E-prime. Señalan que eliminar todas las formas de un verbo en particular solo puede

empobrecer la escritura y hacerla menos interesante, al reducir las opciones del autor. También destacan que el verbo prohibido se comunica sin ambigüedad en muchas situaciones comunes: por ejemplo, si alguien pregunta “What color is that rose?”, la respuesta “That rose is red” no contiene ambigüedad ni causa de confusión. Además, si el objetivo es eliminar inferencias lógicas no fundamentadas, los escritores maliciosos siempre pueden colarlas usando otros verbos. Podrían cambiar, por ejemplo, el enunciado no-E-prime “Erik’s pódcast are silly” (“los pódcast de Erik son tontos”) por el enunciado plenamente aceptable en E-prime “Erik records silly pódcast” (“Erik graba pódcast tontos”), manteniendo la acusación implícita de tontería sin usar la palabra are. Si consultas el artículo enlazado en las notas del episodio, también encontrarás numerosas objeciones más oscuras a E-prime que tienen sentido casi exclusivamente para los devotos de la Semántica General.

Entonces, ¿deberíamos todos intentar eliminar el verbo to be de nuestra escritura para hacerla más clara, rigurosa y menos dogmática? A juzgar por lo que veo en la web, parece existir todavía una comunidad pequeña pero dedicada de E-prime, como subconjunto del movimiento de Semántica General, que aún continúa. Creo que la adopción de algunos aspectos de su filosofía por parte del movimiento de Cienciología —bastante inquietante— no les hizo ningún favor. Pero, como ocurre con muchas ideas radicales, pienso que los conceptos de E-prime pueden contener un grano de verdad. Varios profesores de inglés y redacción afirman en línea que, si bien no aplican la estricta disciplina de E-prime en el uso general, sí lo recomiendan a sus estudiantes como una forma de mejorar la claridad y la disciplina en su escritura. Después de leer algunos artículos al respecto, yo mismo me siento motivado a revisar mi escritura para evitar el abuso de enunciados con is sin fundamento. Si has leído con atención, quizá ya hayas notado que intenté escribir esta sección en E-prime, con el verbo to be apareciendo solo cuando lo cito, no cuando lo uso. ¿Te parece que mi manera de pensar y escribir resulta más clara de lo habitual, o simplemente más forzada? Solo ustedes, los lectores, pueden juzgarlo.

Des-abstraer tu vida

Del pódcast Mutación matemática 212

Uno de los principios centrales de las matemáticas es la idea de abstracción: generalizar a partir de diversas experiencias para describir modelos simplificados que permiten un razonamiento riguroso. Por ejemplo, si miras un mapa de calles de tu ciudad, en él no hay ningún triángulo euclidiano puro: todas las carreteras tienen grosor, pendientes variables, mapaches aplastados, etc. Pero al razonar sobre triángulos y líneas ideales, podemos hacer deducciones poderosas sobre las distancias entre puntos, que resultan muy útiles y bastante precisas en la práctica. Sin embargo, existe un lado oscuro de la abstracción: cuando se usa demasiado en la vida cotidiana, puede llevarnos a generalizar en exceso y derivar en problemas como los estereotipos y los prejuicios.

Por ejemplo, hace 20 años tuve un compañero de cuarto escocés llamado Lloyd. Lloyd era un gran tipo, pero no entendía ni una palabra de lo que decía, debido a su desmesurado acento escocés. Finalmente empezamos a llevar un bloc de notas en la habitación para que pudiera escribir lo que necesitaba comunicar. Tras unos meses con él, estaba al borde de la locura. Ahora, cada vez que me presentan a alguien de Escocia, me estremezco por dentro, preparándome para una experiencia similar. En efecto, he abstraído a Lloyd como el escocés general en mi mente, lo que afecta mis relaciones y experiencias posteriores con sus compatriotas. No ha tenido mucho impacto en mi vida —la mayoría de los escoceses aún no han descubierto las maravillas de Hillsboro, Oregón—, pero sigue siendo un mal hábito. ¿Hay algo sencillo que pueda hacer para curarme de esta forma de pensar? Un conjunto de ideas intrigantes proviene de un movimiento de filosofía popular del siglo XX conocido como Semántica General.

La Semántica General fue creada inicialmente por el conde polaco Alfred Korzybski en la década de 1930, y detallada en un libro titulado Science and Sanity. Este libro describe una filosofía de amplio alcance basada en evaluar nuestra “respuesta semántica” total a la realidad, y

en aprender a separar la verdadera realidad, nuestras observaciones de ella y el lenguaje que usamos para describirla. Al hacernos conscientes de nuestra tendencia a sobre-abstraer, podemos mejorar nuestro propio nivel de cordura, de ahí el título del libro Science and Sanity. Aunque los filósofos y lingüistas serios no suelen considerar las ideas de Korzybski como muy profundas, atrajo a una devota cohorte de seguidores que creen que las herramientas de la Semántica General pueden mejorar significativamente la vida de las personas al reducir los errores que resultan del exceso de abstracción. Este movimiento también condujo a la propuesta de "E-prime", el inglés sin el verbo to be que describí en la sección anterior. Korzybski era también un poco fanático de las matemáticas: cuando a su Instituto de Semántica General en Chicago se le asignó la dirección 1232 East 56th Street, él la cambió a 1234 para crear una bonita progresión numérica.

Entre las herramientas clave que ofrece la Semántica General para corregir las sobre-abstracciones están los "dispositivos extensionales": nuevas maneras de pensar el mundo que ayudan a contrarrestar nuestras tendencias naturales. Muchos de ellos consisten en añadir números a las palabras. El más básico es el "indexado": asignar números mentalmente para enfatizar las diferencias entre objetos similares. Por ejemplo, podría pensar en mi amigo Lloyd como Escocés-1. Luego, si me presentan a otra persona de Escocia, puedo pensar en él como Escocés-2, subrayando que es alguien completamente distinto de Escocés-1 a pesar de su origen común. Si salgo con mi nuevo amigo a cenar un delicioso haggis, pensaría en el camarero como Escocés-3, reconociendo de nuevo su singularidad esencial y diferenciándolo de los otros dos. Mediante esta asignación de números, evito agruparlos a todos en la abstracción única de "los escoceses", y me obligo a tratarlos como individuos.

Otro dispositivo extensional importante es el "fechado", similar al indexado pero basado en el tiempo. Con este recurso, se añaden fechas a los objetos, indicando cuándo los observamos o experimentamos. El Lloyd que recuerdo debería pensarse en realidad como Lloyd-1993, ya que fue entonces cuando lo conocí, y solo estoy familiarizado con sus características de esa época. Si me escribe que viene a la ciudad, debería pensar en él como Lloyd-2015, que puede ser una persona muy

distinta en muchos aspectos. Tal vez haya trabajado en su acento, o quizá, debido a mis más de veinte años adicionales de experiencia de ingeniería con colegas de orígenes muy diversos, mis oídos se hayan afinado para entender mejor acentos inusuales. No debería sobre-abstraer y asumir que sus características más notorias de entonces, y mi percepción de ellas, serán las mismas hoy. Como todo en el universo, él y yo estamos cambiando constantemente, y puedo usar este dispositivo extensional para recordármelo.

Existen otros dispositivos extensionales en la Semántica General, como el uso de et cétera, las comillas y los guiones para calificar aún más el lenguaje abstraído. Estos me parecen un tanto forzados, aunque a algunos les pueden resultar útiles. En conjunto, creo que los conceptos generales detrás de los dispositivos extensionales de Korzybski pueden servir como una herramienta práctica —especialmente si algún día viajo a Escocia—, aunque quizá no sean tan profundos como piensan los fanáticos de la Semántica General. El movimiento de Korzybski parece seguir bastante vivo, con institutos activos en Nueva York, Australia y Europa, con presencia en la web y en redes sociales, y un boletín trimestral que se imprime ininterrumpidamente desde 1943. Naturalmente, he simplificado enormemente muchas de las ideas centrales en este breve pódcast, pero si esto ha servido para abrirte el apetito, puedes encontrar muchos más detalles en su página web.

Tus hijos son más inteligentes que tú

Del pódcast Mutación matemática 208

¿Sabías que, medido con estándares constantes, el Cociente Intelectual promedio, o CI, de la población mundial ha ido aumentando de manera sostenida desde que comenzó a medirse? De hecho, según los estándares actuales, tus bisabuelos probablemente serían diagnosticados formalmente como retrasados mentales. Es un poco confuso, porque las pruebas de CI se renormalizan continuamente, de modo que el "CI promedio" en cualquier momento dado siempre se ajusta a 100. Pero si miramos las puntuaciones brutas de los tests y las comparamos a lo largo de las décadas, vemos que en todos los países industrializados modernos el CI ha ido subiendo lentamente. Este efecto es conocido como el Efecto Flynn, en honor al psiquiatra neozelandés que lo observó por primera vez en la década de 1980. Resulta bastante sorprendente: ¿podría ser que nuestra población entera esté aumentando de forma continua su inteligencia?

Cuando escuché hablar de este efecto por primera vez, fui un poco escéptico. Si has leído el clásico de Stephen Jay Gould La falsa medida del hombre, sabrás de las múltiples formas rotas y ridículas en que se intentó medir la inteligencia en distintos momentos de la historia. Mi ejemplo favorito fue una prueba de CI de principios del siglo XX en la que tu inteligencia dependía, en parte, de tu capacidad para recordar la ubicación de ciertas universidades de la Ivy League. Aunque ya no es probable que aparezcan ejemplos tan grotescos, uno podría conjeturar fácilmente que el Efecto Flynn solo está midiendo el hecho de que, en el último siglo, los niños han estado cada vez más expuestos a una gran cantidad de trivialidades: primero mediante la radio, luego la televisión, los medios masivos crecientes, y finalmente Internet.

Incluso cosas sencillas, como el mayor acceso a libros y revistas a lo largo del siglo XX, podrían haber contribuido. Recuerdo todas las horas que pasé recorriendo en bicicleta las librerías de segunda mano de mi ciudad en busca de libros interesantes de matemáticas y ciencia, y dudo que mi padre tuviera esa oportunidad a mi edad. Mi hija ni siquiera

tendrá que preocuparse por semejantes absurdos: tiene acceso instantáneo, vía Internet, a prácticamente toda la literatura importante publicada por la humanidad. Pero resulta que la creencia de que este aumento del CI solo refleja acceso a más datos acumulados no es del todo correcta: el crecimiento ha sido muy menor en las pruebas basadas en ese tipo de conocimientos factuales, y se debe más bien a un aumento en la capacidad de razonamiento abstracto con conceptos simples.

En nuestra vida moderna damos por sentada la abstracción: la capacidad de hablar y comparar ideas en lugar de limitarnos a discutir objetos y acciones concretos de relevancia inmediata. Y, por supuesto, toda la matemática moderna —incluyendo muchos de los temas que tratamos en Mutación matemática— depende de esta habilidad. Pero no es algo trivial: ha ido creciendo en nuestra sociedad de generación en generación. Por ejemplo, un artículo que encontré habla de un estudio realizado en una tribu aislada de Liberia. Allí, tomaron objetos al azar de la aldea y pidieron a los aldeanos que los clasificaran en categorías. En lugar de agruparlos en ropa, herramientas y comida, como haríamos nosotros, los ponían juntos según su uso: por ejemplo, una papa con un cuchillo, ya que el cuchillo sirve para cortar la papa. Al parecer, las pruebas modernas de CI miden en gran parte nuestra capacidad de pensar en categorías abstractas, y esa es la habilidad que está creciendo. Flynn ha sostenido que deberíamos llamarla "más moderna" en lugar de "más inteligente": ¿podemos decir objetivamente que un tipo de pensamiento es mejor que otro? Sin embargo, probablemente sí podamos afirmar que este pensamiento moderno es un componente crítico en la explosión de ciencia y tecnología que observamos hoy en el mundo.

Hay numerosas teorías que intentan explicar el Efecto Flynn. La mayoría se centra en factores sociales. Quizás la explosión mediática sea importante no por las trivialidades, sino porque nos coloca en un entorno cognitivamente más complejo, obligándonos a pensar en abstracciones para dar sentido a la avalancha de ideas provenientes de la literatura, la televisión y la red. El crecimiento de trabajos intelectualmente exigentes —donde cada vez más personas tienen empleos que implican pensar al menos un poco, en lugar de ser pura

labor manual— también puede contribuir. Otro factor posible es la reducción del tamaño familiar en Occidente: con menos niños en cada hogar, cada uno recibe más atención de los padres, lo que puede fomentar el desarrollo del pensamiento abstracto. Y, por supuesto, en años recientes, estoy seguro de que ha habido una explosión de CI entre el subconjunto más importante de la población: quienes escuchan Mutación matemática.

Aparte de los factores sociales, hay otros más básicos: mejoras esenciales en salud y bienestar, como la drástica reducción de la malnutrición y las enfermedades, podrían ser decisivas. Algunos estudios han mostrado que la salud simple puede tener un efecto mucho mayor en el éxito educativo que las computadoras más sofisticadas. También existe la teoría de que lo que estamos midiendo es un efecto de la selección natural darwiniana: que los padres con este estilo de pensamiento más moderno tienen más probabilidades de reproducirse, al adaptarse mejor a nuestra sociedad tecnológica del siglo XX-XXI. Pero la mayoría de los biólogos creen que el Efecto Flynn ha ocurrido demasiado rápido como para explicarse por evolución.

Para complicar más la discusión, algunos estudios recientes en el norte de Europa parecen mostrar que el Efecto Flynn está desapareciendo o incluso revirtiéndose. No está claro si se trata de un efecto real o de un artefacto de los cambios poblacionales recientes: en las últimas dos décadas ha habido una inmigración masiva desde el Tercer Mundo hacia esos países, y podría ser que simplemente estemos midiendo que muchos de esos inmigrantes se encuentran en etapas iniciales de la "cinta de correr" del Efecto Flynn. Pero, como en todas las generaciones, nunca faltan los comentaristas que encuentran buenas razones para afirmar que los jóvenes de hoy se están volviendo más tontos, ya sea por centrarse en videojuegos repetitivos o en banalidades de las redes sociales. Claro que habría que contrastar esto con las "búsquedas" más intelectuales de sus padres, tales como Looney Tunes y Jerry Springer.

Entonces, ¿qué significa todo esto? Ciertamente vemos algunos efectos en la sociedad que muy bien podrían deberse en parte al Efecto Flynn, como la explosión de nuevas tecnologías en los últimos años. Creo que deberíamos hacer todo lo posible por seguir ayudando a

nuestros hijos a ser más inteligentes, y fomentar un pensamiento cada vez más abstracto y moderno —aunque eso sería deseable incluso sin el Efecto Flynn. Anima a tus hijos a emprender tareas cognitivamente complejas, como leer muchos libros, aprender a tocar un instrumento musical o conversar sobre pódcast de matemáticas interesantes. Pero cuando dentro de unos años te digan que te estás volviendo senil, no lo tomes como algo personal: en realidad sí eres más tonto que ellos, gracias al Efecto Flynn.

Me duele el cerebro

Del pódcast Mutación matemática 56

Apuesto a que muchos de ustedes, como yo, suelen pensar en su cerebro como si fuera una especie de computadora. Parece tener sentido intuitivo, al fin y al cabo, consiste en un montón de neuronas que disparan patrones eléctricos. En ese caso, nuestra conciencia podría ser simplemente un conjunto de patrones matemáticos de disparos electrónicos, circulando por nuestros cerebros-computadoras. Pero ¿tiene realmente sentido esta visión? Claro está, se han escrito numerosos tratados sobre las ventajas y desventajas de pensar en el cerebro de este modo, sin mencionar a los dioses de varias religiones que me fulminarían solo por sugerirlo. Pero recientemente estaba leyendo un relato bastante curioso titulado La historia de un cerebro, de Arnold Zuboff, parte de la clásica colección El yo de la mente, que plantea problemas muy interesantes con esta idea.

Para resumir, la historia gira en torno al cerebro de un hombre diagnosticado con una enfermedad terminal. Unos científicos idean un procedimiento radical: preservar su cerebro en un frasco, manteniéndolo vivo y consciente; la estimulación sería proporcionada por una computadora que dispararía los nervios externos como si el cuerpo siguiera conectado. De esa manera, el moribundo podría vivir para siempre. Hasta aquí, ciencia ficción bastante estándar.

El giro llega cuando los científicos deciden probar un nuevo experimento. Separan el cerebro en dos mitades y conectan cada una a una computadora diseñada para simular la otra mitad. Discuten un poco sobre si ambas mitades deben mantenerse con la misma orientación física: ¿puede una estar de lado? ¿Y las computadoras deben estar perfectamente sincronizadas, o pueden congelar el proceso de una mitad durante el transporte a otro laboratorio y luego reanudarlo, provocando que una mitad del cerebro quede en “diferido” respecto de la otra? Finalmente deciden que esos detalles no deberían ser un problema, y se llevan una de las mitades a otro laboratorio.

Años después, el experimento continúa, y ahora hay millones de

laboratorios en toda la galaxia, cada uno con una de las neuronas originales conectada a un programa de computadora. Algunas empiezan a desgastarse, de modo que, cuando esto ocurre, el científico propietario simplemente adquiere una neurona equivalente de otro cuerpo moribundo y la conecta al mismo programa. Entonces, un día, mientras se inclina sobre la neurona para observar sus disparos, uno de los científicos tiene un pensamiento: debe haber alguna neurona, entre los millones de su propia cabeza, que esté disparando en ese mismo instante en que dispara la neurona del laboratorio. Entonces, ¿qué más da preocuparse por la del laboratorio? Mientras haya un conjunto de personas con neuronas disparando continuamente, el total de ese subconjunto es equivalente a la conciencia original del sujeto.

Puedes ver los extraños dilemas que plantea esta historia. Si de verdad la mente fuera una computadora, y tu conciencia solo un patrón matemático circulando en ella, ¿dónde está la falla del relato? Cuando el cerebro se dividió, ¿la conciencia del hombre fue clonada de repente, o dejó de existir? ¿Y qué hay de cuando se separó en neuronas individuales? ¿Murió realmente el sujeto en algún momento, y si lo hizo, cuándo? ¿Y por qué la conclusión final del científico no muestra simplemente que podrían haber enterrado al tipo desde el principio, sin molestarse con el laboratorio?

Es divertido intentar responder a estas paradojas. Una respuesta obvia es que hay una gran premisa implícita: las computadoras conectadas a las mitades o neuronas deben ser, en efecto, simuladores de inteligencia artificial de la mente original del sujeto. ¿Podría lograrse una IA así de efectiva? Incluso si pudiéramos construir programas de software conscientes, una réplica exacta de la mente de una persona concreta parece una tarea titánica. Otro problema está en la suposición del último científico: que en cada momento alguien, en algún lugar, debe estar replicando el disparo neuronal necesario. Dada la población humana finita y la actividad neuronal finita, ¿cuáles son las probabilidades reales de que eso ocurra? No me queda claro que sean cercanas al 100%.

Pero estas objeciones apenas arañan la superficie. Estoy seguro de que, entre los patrones aleatorios de disparos neuronales de tu propio cerebro, puedes encontrar muchas más formas de responder a los

planteamientos de este relato. Algunos incluso podrán hallar objeciones codificadas en los patrones aleatorios de otras partes de su cuerpo. Pero para un debate más profundo sobre todos estos temas, te recomiendo encarecidamente que leas la antología clásica El yo de la mente, donde encontré este cuento por primera vez.

Psicrocronometría

Del pódcast Mutación matemática 202

Hace poco celebré mi cumpleaños número 46. Parece que los años están pasando volando ahora: siento como si ayer mismo estuviera aprendiendo a hacer pódcast, y mi hija, que ahora cursa cuarto grado, fuera aún el bebé del logo de Mutación matemática. Esto encaja bastante bien con el hecho de que recientemente estuve leyendo Thinking in Numbers, el último libro de Daniel Tammet. Este libro es en realidad una colección de ensayos vagamente autobiográficos sobre diversos temas matemáticos. Uno que encontré especialmente interesante fue la discusión sobre cómo cambia nuestra percepción del tiempo a medida que envejecemos.

Creo que la mayoría de nosotros sentimos que cuando éramos jóvenes, el tiempo parecía más largo. Los 365 días entre un cumpleaños y el siguiente eran un lapso inconcebiblemente vasto cuando tenías 9 o 10 años, mientras que a los 45 ya no parecen tan extensos. Tammet señala que hay una manera bastante simple de explicar esto con matemáticas: cuando eres joven, cualquier cantidad de tiempo representa una proporción mucho mayor de tu vida. Cuando tienes 10 años, el año siguiente equivale al 10% de tu vida previa, lo cual es un fragmento considerable. A mi edad, el próximo año será apenas 1/45 de mi vida, alrededor de un 2,2%, algo mucho menos perceptible. Así que es lógico que, conforme envejecemos, cada año resulte menos y menos significativo. Esta observación en realidad no se originó con Tammet, sino que fue señalada por primera vez por el filósofo del siglo XIX Paul Janet, profesor en la Sorbona de Francia.

Siguiendo con el tema, encontré un buen artículo en línea de un autor llamado James Kenney. Él menciona que existe un término para este análisis de por qué el tiempo parece transcurrir a diferentes ritmos: psicrocronometría. Extendiendo el concepto de que el tiempo se experimenta de manera proporcional, señala que deberíamos pensar los años como una escala musical: en música, cada vez que subimos una octava, duplicamos la frecuencia. De manera similar, deberíamos

imaginar nuestras vidas divididas en “octavas”, cada una percibida como aproximadamente equivalente en tiempo subjetivo a la anterior. Así, los periodos de 1 a 2 años, de 2 a 4, de 4 a 8, de 8 a 16, de 16 a 32 y de 32 a 64 constituyen octavas, experimentadas por el ser humano promedio como más o menos equivalentes.

Esta perspectiva tiene un costado algo sombrío: me incomoda pensar que, salvo avances médicos verdaderamente extraordinarios en la próxima década o dos, ya estoy bien entrado en la penúltima octava de mi vida. ¿Será que realmente estoy acelerando por la autopista hacia la vejez con el pie atascado en el acelerador, y que el tiempo pasa cada vez más rápido? ¿Hay algo que pueda hacer para sentir que me queda más tiempo? Por suerte, una pequeña investigación en la web revela que existen otras teorías sobre el paso del tiempo que ofrecen un poco más de esperanza.

En particular, me gusta la llamada “teoría perceptual”: la idea de que nuestra percepción del tiempo está en proporción a la cantidad de cosas nuevas que hemos experimentado durante un intervalo. Cuando eres niño, casi todo es nuevo y estás aprendiendo constantemente sobre el mundo. Al llegar a la adultez, tendemos a establecernos en rutinas, y aprender o experimentar algo verdaderamente nuevo se vuelve cada vez más raro. Según esta teoría, la falta de experiencias nuevas es lo que hace que el tiempo se sienta como si pasara demasiado rápido. Y esto significa que sí hay algo que podemos hacer al respecto: si sientes que todo se está volviendo repetitivo, intenta organizar tu vida de manera que continúes teniendo experiencias novedosas.

Hay muchas formas comunes de abordar este problema: viajar, cambiar de trabajo, casarse, tener un hijo o alcanzar la cúspide del logro humano y empezar un pódcast. Si el tiempo o el dinero escasean, también hay maneras sencillas de añadir experiencias nuevas sin grandes cambios en la vida. Mi marcado interés por los mundos imaginarios y virtuales ha sido una fuente interminable de diversión para mi esposa. Participo de un juego semanal de Dungeons and Dragons, sigo con avidez la serie de novelas gráficas Fables, hago ejercicio corriendo por ciudades aleatorias en Wii Streets U, y me encanta explorar reinos electrónicos en videojuegos como Skyrim o Assassin’s Creed. Podrías argumentar que la irrealidad de estos mundos

los hace menos “experiencia” que otras cosas que podría estar haciendo, pero creo que es difícil negar que realmente añaden momentos a mi vida que son fundamentalmente distintos de mi rutina diaria. Uno podría sostener que una mejor forma de obtener experiencias nuevas es viajar más y conocer lugares reales, pero personalmente sacrificaría 100 años de vida si eso significara no tener que lidiar nunca más con los controles de seguridad en los aeropuertos, o pasar 6 horas encogido en un asiento de avión diseñado para contorsionistas enanos.

Entonces, ¿mis variadas experiencias virtuales alargarán mi vida percibida, o estoy condenado irremediablemente por las matemáticas de Janet? Encuéntrame dentro de 50 años y quizá tenga una buena respuesta. O quizá no: para entonces, el tiempo estará pasando demasiado rápido como para que me detenga a prestar atención a preguntas tan tontas.

CAPÍTULO 7

Ciencia y escepticismo

Desde que leí en la secundaria el clásico de Martin Gardner Fads and Fallacies in the Name of Science (Mitos y falacias en nombre de la ciencia), he tenido un fuerte interés en la idea del escepticismo: examinar críticamente nuestras suposiciones sobre la ciencia y las maneras en que malinterpretamos el mundo que nos rodea. Esto no significa simplemente atacar blancos fáciles como la astrología o la numerología, sino también hacernos preguntas básicas sobre las fuentes de todo nuestro conocimiento científico. Debemos cuidarnos de no definir el escepticismo simplemente como una reacción negativa instintiva ante las modas más ridículas de la Nueva Era, sino como la exigencia de pensar con cuidado sobre nuestras suposiciones, tanto las ocultas como las evidentes.

El "Movimiento Escéptico" ha explotado en la última década, impulsado por nuestra creciente capacidad de conectarnos con personas afines en la web y por la abundancia de excelentes pódcast sobre el tema. De hecho, me atrevería a adivinar que los pódcast escépticos son hoy la categoría más grande de pódcast científicos en Internet. Debido a esta saturación del género, he intentado no concentrarme demasiado en temas escépticos en Mutación matemática. Pero de vez en cuando no puedo resistir la tentación de producir un episodio en este terreno, que suele ser tan sorprendente como divertido.

Por qué los estadísticos apestan en estadística

Del pódcast Mutación matemática 163

Últimamente he estado leyendo el brillante éxito de ventas The Black Swan (El cisne negro), de Nassim Nicholas Taleb, que analiza el impacto de los eventos improbables en nuestras vidas. Uno de los puntos sorprendentes que plantea Taleb es que los seres humanos

estamos programados para ser realmente malos con la probabilidad y la estadística. Tenemos una mente heurística incorporada, que toma atajos para llegar a conclusiones que no estarían justificadas matemáticamente si pensáramos las cosas con más cuidado. Taleb hace muchas referencias al trabajo de los pioneros Kahneman y Tversky, quienes primero hicieron esta observación a principios de los años setenta, publicando artículos clásicos sobre lo que llegó a conocerse como "sesgos cognitivos". Sus experimentos muestran que incluso profesionales que deberían saber más —científicos, médicos y estadísticos— cometen estos errores.

Un sesgo cognitivo común es el llamado anclaje. Supongamos que quieres estimar cuántos oyentes tiene Mutación matemática. Divide a tus amigos en dos grupos, A y B. Al grupo A pregúntale: "¿El número de oyentes es mayor que 1.000, o menor que 1000?". Luego pídeles que adivinen el número exacto. Después, ve al grupo B y pregúntales: "¿El número de oyentes es mayor que 100.000, o menor que 100.000?". Pídeles también que adivinen el número exacto. Verás que los del grupo A darán estimaciones mucho más bajas que los del grupo B: las respuestas del grupo A estarán cerca de 1.000, mientras que las del grupo B se acercarán a 100.000. Al parecer, cuando nos piden un número sobre el cual sabemos muy poco, nos "anclamos" de manera natural a los números que acabamos de oír como referencia. Compradores y vendedores astutos aprovechan este sesgo cuando abren una negociación con una oferta altísima o bajísima, fijando así las expectativas en la dirección que les conviene. Sorprendentemente, algunos experimentos muestran que el anclaje sigue funcionando incluso si el número inicial proviene de girar visiblemente una ruleta.

Otro sesgo cognitivo común es el llamado encuadre (framing). Imagina que te planteo este escenario: necesitamos decidir qué pódcast transmitir por altoparlantes municipales para inspirar a los carteles de la droga a terminar con la violencia en una pequeña ciudad de Centroamérica, donde mueren 6.000 personas al año. Si eliges Mutaciones matemática, las proyecciones muestran que se salvarán 2.000 vidas. Si en cambio eliges A Gobbet of Pus, hay un 1/3 de probabilidad de salvar 6000 vidas, y un 2/3 de probabilidad de no salvar ninguna. ¿Qué pódcast escogerías? Lo más probable es que elijas

Mutación matemática. Pero supón que te lo presento de otra manera: si eliges Mutación matemática, morirán 4.000 personas. Si eliges A Gobbet of Pus, hay un 1/3 de probabilidad de que no muera nadie, y un 2/3 de probabilidad de que mueran 6.000. En este caso, la gran mayoría optaría por la segunda alternativa. Pero si piensas con cuidado, verás que es exactamente la misma decisión en ambos casos. El encuadre positivo o negativo de la pregunta altera drásticamente nuestra percepción del resultado.

Un tercer sesgo cognitivo muy conocido es la falacia de la conjunción. Supongamos que te doy una breve biografía de alguien llamado Fred, que obtuvo 800 en su examen SAT de matemáticas, estudió física en Princeton y fue campeón de su equipo de ajedrez. Ahora dime cuál de las siguientes afirmaciones es más probable:

A. Fred es cajero de banco.
B. Fred es cajero de banco y presidente del club de fans de Mutación matemática en su ciudad.

Lo más probable es que te inclines por la opción B. Pero piensa en ello: la opción B, al ser "cajero de banco y presidente del club de fans", debe ser estrictamente menos probable que A, que solo dice que es cajero de banco. Hemos tomado la misma afirmación básica y añadido una condición más restrictiva. Te engaña tu tendencia natural a enfocarte en declaraciones específicas en lugar de en las más generales.

Entonces, ¿qué podemos aprender de todos estos sesgos cognitivos? La verdadera lección es simplemente reconocer que los tenemos: cada vez que trates con números o probabilidades, tendrás un impulso biológico de tomar atajos en lugar de pensar realmente el problema. Cuando solo juegas o eliges qué pódcast escuchar, esto puede estar bien; pero cuando hay dinero o vidas en juego, necesitas hacer ese esfuerzo extra para dar un paso atrás y cuestionar la racionalidad de tus decisiones.

En promedio, las cosas son promedio

Del pódcast Mutación matemática 58

Puede que hayas oído hablar de la "maldición de la portada de Sports Illustrated": la leyenda de que los atletas que aparecen en la portada de Sports Illustrated tienden a sufrir un declive en sus carreras después. Naturalmente, a todos nos gusta pensar que poderes divinos están castigando a esas superestrellas por sus excesivos egos. Al fin y al cabo, si el universo fuera justo, tú estarías en esa portada, ¿verdad? Pero si miras las carreras de los deportistas que salen en la portada, realmente puede parecer que existe algún tipo de efecto de maldición: muchos atletas sí parecen rendir menos tras su aparición. ¿Qué está pasando aquí? En realidad, la explicación se reduce a matemáticas sencillas.

El fenómeno que explica esto se conoce como "regresión hacia la media". Es una forma elegante de decir que si tomas cualquier cantidad medible que tenga un componente importante de azar, y la vuelves a observar tras haber obtenido un valor muy alto, el siguiente valor que verás probablemente será más bajo. No hay magia: todos los valores tienden a acercarse al promedio, asumiendo distribuciones aleatorias típicas, así que cualquier valor dado tendrá la mayor probabilidad de encontrarse cerca del promedio. Así que si obtienes un valor realmente alto, el siguiente casi con toda seguridad será más bajo… no por una maldición, sino porque, en promedio, los valores tienden al promedio.

¿Qué significa esto en términos de rendimiento deportivo? No quiero restar mérito al empuje y esfuerzo de los atletas individuales; es innegable que las superestrellas suelen ser muy buenas en lo que hacen, con o sin una portada de Sports Illustrated. Pero estoy seguro de que coincidiremos en que hay multitud de factores aleatorios en cualquier competición deportiva: el clima, el viento, las estrategias imprevisibles del equipo contrario, los balones sueltos fortuitos que aparecen en el momento justo, los gritos distractores de los aficionados, o los intrigantes pódcast matemáticos del día anterior que siguen rondando la cabeza de los jugadores. En conjunto, estos factores

constituyen un componente de azar notable en cualquier competición, y pueden sumar un efecto importante a lo largo de una temporada.

Así que si un atleta tiene una temporada excepcional y aparece en la portada de Sports Illustrated, eso significa que esos componentes aleatorios se alinearon para producir un "factor plus" muy positivo que se sumó a su talento puro. Por regresión hacia la media, es muy improbable que ese factor plus vuelva a alcanzar el mismo nivel excepcional la siguiente temporada: lo más probable es que se acerque al nivel medio, como suele ocurrir cada temporada. Por tanto, aunque el deportista no haya perdido talento, los factores aleatorios probablemente no volverán a favorecerle ese año posterior, y dará la impresión de que está "gafado", cuando en realidad simplemente no se ha repetido una racha de suerte excepcional.

La regresión hacia la media puede aparecer en muchos ámbitos de la vida cotidiana si te pones a buscarla. No es muy probable que tengas dos accidentes de coche en días consecutivos: podrías achacar la ausencia del segundo accidente a que condujiste mejor después del primero, pero quizá lo realista es que, en un día normal, tu mala conducción no suele ser lo bastante mala como para provocar un choque. Tras una nota excepcional en un examen escolar, puede que en el siguiente no te vaya tan bien; tal vez estudiaste menos, o quizá simplemente tuviste suerte la vez anterior. Si un día te sientes especialmente resfriado y tomas un remedio homeopático, probablemente te sentirás mejor al día siguiente —no porque los remedios homeopáticos hagan algo, sino porque lo más probable es que vuelvas a tu nivel medio de salud salvo que sufras una enfermedad grave. Cada vez que intentes analizar alguna relación causa-efecto en tu vida, deberías preguntarte si la regresión hacia la media no es la mejor explicación.

No entres en pánico

Del pódcast Mutación matemática 101

Supongamos que llegas a casa tras un largo día de trabajo, enciendes la televisión y ves un sensacionalista reportaje sobre una enfermedad nueva y peligrosa: el Síndrome del Cerebro Explotador. Aunque solo afecta a una de cada millón de personas, sus efectos son horrorosos, y las imágenes muestran los restos de "gente guapa" tras la explosión de su cerebro. Aterrado, vas al médico para hacerte la prueba "por si acaso". —"No hay problema", te dice. —"Tengo una prueba que es 99% exacta. Déjame sacar sangre y te llamo mañana." Al día siguiente recibes un mensaje serio en el buzón: "Su prueba ha dado positiva." ¿Debes empezar a prepararte para la inevitable explosión de tu cerebro?

Aunque la mayoría de la gente, incluidos muchos médicos, dirían que sí, en realidad esa respuesta está equivocada. Hay que tener en cuenta tanto la exactitud de la prueba como la prevalencia de la enfermedad en la población, y al combinar ambos datos verás que no deberías preocuparte tanto. Pongamos números concretos para ilustrarlo.

Supón que vives en una ciudad de un millón de habitantes. Dado que la enfermedad afecta a una de cada millón, probablemente solo hay una persona con el Síndrome del Cerebro Explotador en tu ciudad. Pero como la prueba tiene solo un 99% de exactitud, eso significa que de los casi un millón de personas sanas, aproximadamente el 1% de ellas, o diez mil personas, darán positivo en la prueba. Así que tu probabilidad real de tener la enfermedad, dado que eres uno de las diez mil y una personas que dieron positivo, es de una entre diez mil y una, es decir, menos del 0,01%. No tan dramático como la probabilidad inicial de uno entre un millón, pero sigue siendo una cifra minúscula.

Este cálculo contraintuitivo tiene implicaciones reales: significa que hacer muchas pruebas para enfermedades raras probablemente consumirá enormes cantidades de tiempo y recursos en tratar falsos positivos, y en el peor de los casos puede causar daños reales por los efectos secundarios de tratamientos drásticos indicados para dolencias

peligrosas y raras. Por ejemplo, algunos estudios sugieren que las pruebas de PSA para detectar cáncer de próstata pueden haber hecho más daño que bien desde que se popularizaron, con personas que no tenían la enfermedad sufriendo radioterapia y quimioterapia.

Si tu médico te dice que la prueba para una condición rara ha salido positiva, asegúrate de indagar en los detalles, hazte otra prueba independiente si está disponible y sopesa bien los riesgos del tratamiento frente a los riesgos de la enfermedad. Es posible que exista mayor riesgo de que tu cerebro explote por el pánico que por el propio Síndrome del Cerebro Explotador.

Tiene que ser cierto, hay una ecuación

Del pódcast Mutación matemática 132

Se cuenta que la emperatriz rusa Catalina la Grande se molestó con el filósofo ateo Diderot y pidió ayuda al famoso matemático Euler. Euler acudió a su corte y presentó su "prueba" en forma de una ecuación matemática:

"(a + bn/n = x, por lo tanto Dios existe."

Diderot, que no tenía formación en álgebra, no supo cómo rebatir ese argumento y tuvo que aceptar la humillación y volver a París.

La historia es en realidad una leyenda urbana, pero tiene algo de verdad: las ecuaciones poseen un poder casi místico para convencer a la gente de que hay razón y lógica detrás de lo que se afirma, independientemente del valor real del argumento. Creo que todos los que cursamos ciencias sociales o filosofía en la universidad hemos visto al profesor escribir una ecuación en la pizarra y nos hemos preguntado si de verdad aquel razonamiento tenía ese nivel de precisión matemática. Incluso los profesores de ingeniería son vulnerables a ese sesgo: cuando yo pensaba en acabar mi doctorado en informática, recuerdo a un profesor criticando mi propuesta de tesis: "Necesitas poner unas cuantas ecuaciones más." No le importaba de qué trataran las ecuaciones ni si mi argumento las requería; simplemente las necesitaba ahí para demostrar erudición.

El físico Alan Sokal se hizo famoso por desmontar pretensiones académicas. Su broma más notoria fue lograr que publicaran un artículo trampa que mencionaba, entre otras cosas, la construcción social patriarcal del valor de π. Su libro clásico Fashionable Nonsense (Tonterías de moda) está lleno de ejemplos de referencias dudosas a conceptos matemáticos y físicos por parte de académicos posmodernos. Un ejemplo es su discusión sobre Jacques Lacan, el influyente psiquiatra del siglo XX, cuyos escritos a menudo enlazan términos matemáticos de apariencia arbitraria con el fin de sonar impresionantes. He aquí una cita ejemplar:

"… El significante solo puede ser una línea [rasgo] que se traza fuera de su círculo sin poder contarse como parte de él. Puede simbolizarse por la inherencia de un −1 en el conjunto completo de significantes. Como tal es inefable, pero su operación no es inefable, porque es eso lo que se produce cada vez que se pronuncia un nombre propio. Su enunciado equivale a su significación. Así, al calcular la significación según el método algebraico usado aquí, a saber S(significante)/ s(significado) = s(el enunciado[6]), con S = −1, produce: S = $\sqrt{(-1)}$" Lacan prosigue explicando que esto es el número imaginario i según la definición de los matemáticos, y que de algún modo está relacionado con el pene humano.

Los que abusan de la matemática tienen muchas excusas. Una categoría importante es alegar que las ecuaciones son meras ilustraciones o elementos marginales y que deben verse en el contexto total de la obra. Pero, como explica Sokal, el uso indebido de estos símbolos y términos —que tienen significados muy precisos y útiles en matemáticas— revela un desprecio general por los hechos, la lógica y el rigor intelectual que debería arrojar dudas sobre todo el contexto. Otra excusa habitual es que hay que permitir cierta licencia poética: la matemática se usa como metáfora o analogía para relacionar conceptos abstractos con algo más familiar. Pero en casi todos los casos, la matemática resulta menos familiar para el lector típico de humanidades o ciencias sociales que el propio argumento del autor: ¿cómo se supone entonces que su uso de matemáticas va a aclarar algo? La conclusión lógica es que, en la gran mayoría de estos casos, la matemática se introduce para añadir una impresión de erudición y rigor lógico a argumentos que, de otro modo, son débiles o incomprensibles.

Así que la próxima vez que leas un artículo o un libro en un ámbito no matemático y veas una ecuación, detente un momento y piénsalo. ¿Tiene sentido de verdad? ¿Se usan todos los términos según definiciones matemáticas precisas y sensatas? Si no es así, puede que solo estés leyendo, como diría Alan Sokal, una fashionable nonsense —una tontería de moda.

Una vuelta retorcida sobre Turing

Del pódcast Mutación matemática 107

Muchos físicos estarían de acuerdo en que, de no ser por el control de congestión, la evaluación de los navegadores web quizá nunca habría ocurrido. De hecho, pocos hackers en el mundo discreparían de la unificación esencial de la telefonía IP y el par de claves pública/privada. Para resolver este enigma, confirmamos que los SMP pueden hacerse estocásticos, almacenables en caché e interponibles.

¿El párrafo anterior te pareció coherente? Bueno, las frases suenan plausibles, dentro del incesante flujo de tecnoblabá que parece dominar las discusiones en línea de hoy. Pero en realidad fueron generadas al azar por un programa llamado SCIgen, desarrollado por un grupo de astutos estudiantes de posgrado del MIT. Forman el resumen de un artículo generado aleatoriamente titulado Rooter: A Methodology for the Typical Unification of Access Points and Redundancy (Ruteador: una metodología para la unificación típica de puntos de acceso y redundancia), que de hecho fue aceptado en la World Multiconference on Systemics, Cybernetics, and Informatics de 2005, un congreso real pese a su nombre, que parece tan inventado como el propio artículo.

El programa se basa en un conjunto de estructuras formales conocidas como gramáticas libres de contexto. Estas fueron desarrolladas por Noam Chomsky en los años cincuenta para describir recursivamente las estructuras básicas del lenguaje, descomponiendo segmentos como frases y oraciones en elementos más simples, hasta llegar a combinaciones mínimas de palabras. Por ejemplo, una gramática que describiera oraciones donde se suman combinaciones de X e Y tendría esta regla:

$$S \rightarrow x \mid y \mid S + S$$

Comenzando con el símbolo único S, se puede elegir sustituirlo por las terminales x o y, o bien por la adición recursiva S + S. Así se generan resultados como “x+y”, “x+y+y”, “x+x+y+x”, etc. Estas gramáticas tienen usos importantes en áreas como el análisis sintáctico de programas

informáticos o la comprobación de la corrección gramatical básica de frases. Pero hay que notar que están libres de contexto: no permiten forzar coherencia real entre elementos distantes, lo que significa que no pueden representar el flujo de pensamiento inteligente que debería estar presente en un buen artículo académico. Que sea posible construir artículos plausibles a partir de una gramática libre de contexto con palabras técnicas rimbombantes es, en realidad, una vergüenza para la academia.

Habiendo pasado tiempo en la comunidad académica como estudiante de posgrado, y tras haber escuchado más de mi ración de ponencias de baja calidad en congresos, no puedo sino aplaudir a Jeremy Stribling, Max Krohn y Dan Aguayo, los autores de SCIgen. Observaron con acierto que demasiados congresos académicos parecen tener como único propósito generar dinero para sus organizadores, atrayendo a académicos de frontera que no tienen gran cosa que decir, pero que quieren engordar su currículum con más publicaciones. Llegué a conocer a un profesor que listaba unas tres docenas de sus propios artículos como referencias en cada nuevo texto que publicaba, y los títulos parecían simples permutaciones de las mismas diez palabras. Una manera excelente de poner a prueba la legitimidad de un congreso es enviarle artículos generados al azar y comprobar cuántos aceptan, en comparación con el índice de aceptación de los supuestos trabajos "serios".

En cierto modo, esto es una variación del famoso test de Turing, donde un observador debe conversar mediante chat con dos entidades ocultas en habitaciones separadas y distinguir cuál es humana y cuál es un programa de computadora. Turing concibió este test como una medida de inteligencia artificial: cuando un programa pudiera conversar con suficiente soltura como para ser indistinguible de un humano para un observador medio, la IA habría sido alcanzada.

Este caso, sin embargo, es una especie de reverso: en lugar de intentar demostrar inteligencia artificial en su programa, Stribling, Krohn y Aguayo intentaban exponer la estupidez natural en la academia. Estoy seguro de que Turing aprobaría esta nueva aplicación de su prueba.

El éxito que tuvieron en el congreso mencionado no fue casualidad.

En la web de SCIgen puede verse una lista de congresos y revistas que han aceptado artículos generados automáticamente. Muchos llevan nombres de lo más prestigiosos, como el IEEE International Conference on Computer Science and Software Engineering o el International Symposium of Interactive Media Design. Recuerda: que alguien forme frases con palabras rimbombantes no significa que esté diciendo algo con sentido. Y si ves que un solicitante de empleo tiene muchas publicaciones en su currículum, no te dejes impresionar hasta que leas, comprendas y valores de verdad uno de sus artículos. Si te suena demasiado complicado para entenderlo, puede que haya sido generado al azar.

Quiero mi molécula

Del pódcast Mutación matemática 7

Hace poco estaba curioseando en una farmacia por lo demás respetable, y me sorprendió encontrar algunos remedios "homeopáticos" a la venta. Como de costumbre, sacudí la cabeza y me reí. Estos supuestos "medicamentos" se elaboran según una forma alternativa de ciencia médica que nació en Alemania hace unos doscientos años… y que contradice la matemática más básica. Veamos por qué.

Para empezar, supongamos que aceptas el hecho de que las sustancias están formadas por moléculas, como se reconoce desde hace mucho más que mi vida. Lo que nos aporta la matemática es que se sabe cuántas moléculas forman la masa molecular de una sustancia en gramos: aproximadamente $6{,}02\times10^{23}$. Así que, como ejemplo sencillo, si tienes 10 gramos de un medicamento cuya masa molecular es 10, dispones de unas $6{,}02\times10^{23}$ moléculas.

Ahora podemos ver por qué la matemática de la homeopatía no funciona. Uno de sus principios básicos sostiene que un medicamento no pierde eficacia tras diluirse, sino que de hecho se vuelve más eficaz. Un paso típico de dilución consiste en tomar el medicamento original y mezclarlo con cien veces su volumen en agua: esto se llama 1C. Si tomas una botella del medicamento, realizas esta dilución 1C y luego retiras una botella del resultado, tu nueva botella tendrá aproximadamente cien veces menos moléculas del fármaco original, o 10^{-2} veces la cantidad inicial.

La parte divertida llega cuando lees la literatura homeopática y descubres que la dilución "30C" es la recomendada habitualmente. Esto significa repetir el proceso de 1C treinta veces. La primera vez tienes 10^{-2} de la sustancia inicial; la segunda te deja con 10^{-4}, y así sucesivamente. Al final, tienes 10^{-60} de la sustancia con la que empezaste. Multiplica eso por las $6{,}02\times10^{23}$ moléculas de nuestro ejemplo inicial y te queda $6{,}02\times10^{-37}$: una fracción infinitesimal de una molécula. Es decir, tienes muchas más probabilidades de ganar la

lotería que de encontrar una sola molécula real del medicamento en un frasco tomado de la dilución.

No sé tú, pero cuando pago buen dinero por un medicamento, me gusta que haya al menos una molécula de él en el frasco. ¿Es pedir demasiado?

La proporción crédula

Del pódcast Mutación matemática 185

Un posible tema para el pódcast que me rondó en la cabeza durante muchos años es φ (phi), la proporción áurea, el conocido número irracional igual a

o aproximadamente 1,618. La razón por la que tardé tanto en dedicarle un episodio es que está demasiado manoseado: lo más probable es que, si tienes aunque sea un interés pasajero en matemáticas, en algún momento hayas leído un artículo o escuchado a un profesor hablar de las increíbles propiedades de este valor dorado y de sus supuestas conexiones con el arte, la arquitectura, la biología e incluso la psicología humana. Pero ¿sabías que, en gran medida, el concepto de φ ha sido exagerado y no es tan significativo como algunos afirman? Me topé con esta idea leyendo un ensayo de Martin Gardner en su colección Weird Water and Fuzzy Logic, una serie de artículos que desmienten ideas pseudocientíficas; el capítulo sobre φ se titula "El culto de la proporción áurea". Si bien φ sí tiene relevancia matemática, su importancia en otros ámbitos ha sido inflada.

Antes de desmentir mitos, repasemos qué es φ. Dibuja un segmento de línea y coloca un punto de división tal que la razón entre las dos partes sea igual a la razón del segmento entero con la parte mayor. Dicho en términos algebraicos: si los segmentos miden A y B, necesitamos que (A + B)/A sea igual a A/B. La razón A/B es la definición de φ. La definición geométrica apareció por primera vez en los griegos antiguos y figura en Los Elementos de Euclides, donde surge naturalmente en teoremas sobre los pentágonos: la diagonal de un pentágono mide φ veces su lado. Un resultado relacionado es que, en un pentagrama (la estrella formada por las diagonales del pentágono), cada intersección divide los segmentos en proporciones áureas. Otro resultado curioso, conocido como la construcción de Odom, muestra que si inscribes un triángulo equilátero en un círculo, dibujas el

segmento que une los puntos medios de dos lados y lo prolongas hasta cortar el círculo, las porciones dentro y fuera del triángulo están en proporción áurea.

Estos resultados parecen consecuencia natural del tipo de razón que φ describe, pero lo sorprendente son otros resultados no geométricos. Existen construcciones simples pero infinitas que resultan iguales a φ. Una es la fracción continua:

Si defines esta expresión como s y observas que debe cumplir la ecuación $s = 1 + 1/s$, la cosa se aclara: usando la fórmula cuadrática se prueba fácilmente que $s = \varphi$. De manera similar, existe una representación con raíces cuadradas anidadas:

Pero quizá el resultado más útil relacionado con φ es el de la secuencia de Fibonacci. Como recordarás, se forma sumando continuamente los dos términos anteriores: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13… A medida que se extiende al infinito, la razón entre términos sucesivos se aproxima cada vez más a φ. Lógicamente, esperarías que esto tuviera aplicaciones en la naturaleza, ya que varios procesos aditivos pueden modelarse con Fibonacci, cuando células o partes de un organismo se van agregando para determinar el desarrollo. Sin embargo, dado que la mayoría de los casos reales son finitos, tiene más sentido describirlos como aplicaciones de Fibonacci que como "usos de φ".

El terreno pseudocientífico empieza cuando se fuerzan o manipulan mediciones para hacerlas coincidir con φ con pruebas muy débiles. Esto ha ocurrido con la mayoría de los supuestos vínculos de la proporción áurea con el arte, la arquitectura y la naturaleza. Algunos han llevado la cosa al ridículo: buscando libros sobre φ en Amazon encontré uno titulado The Golden Ratio Lifestyle Diet. Parte de su descripción dice: "La dieta se basa en una fórmula fascinante —la proporción áurea— que, aplicada a cualquier cosa, crea mayor belleza, unidad, eficiencia, valor y éxito: un todo que supera la suma de sus partes. Esta fórmula guía la estructura de la materia y el movimiento de

la energía en todo el Universo." Hmm… yo creo que me quedo con la dieta de pi,[7] mucho más sabrosa.

Una confusión común que alimenta estas exageraciones es la idea de que elementos en esta proporción resultan intrínsecamente más agradables a la vista humana, como si φ estuviera cableado en nuestra biología. Esto proviene en gran parte de un estudio del siglo XIX de Gustav Fechner, quien mostró distintos rectángulos a los sujetos y les pidió elegir el más bonito. Pero los múltiples intentos posteriores de replicar el experimento han dado resultados inconsistentes. De hecho, Gardner describe un intento que concluyó que los rectángulos de 3×5 (como las fichas escolares) son igual de preferidos, sin necesidad de irracionales… quizá un caso donde el mercado libre optimizó mejor que los matemáticos.

También se han señalado supuestas apariciones de esta proporción en la arquitectura antigua, como las pirámides de Egipto o el Partenón griego, y en proporciones corporales de plantas y animales. El problema fatal es la falta de precisión: cambiando un poco los puntos de inicio y fin de la medición, cualquier relación cercana a 1,6:1 o 3:5 puede ajustarse para "parecer" φ o su inverso con algunos decimales. Y en la naturaleza hay tanta variación individual que resulta casi imposible establecer reglas fijas. Por ejemplo, un estudio de 1992 midió la altura del ombligo en 319 hombres y mujeres para comprobar la afirmación de que divide el cuerpo humano en proporción áurea. La conclusión fue: "Reconocemos que el error de medición en este estudio fue un problema delicado. Pero… un practicante del arte del ombligo que quisiera captar proporciones divinas tendría que colocar el ombligo de una típica estudiante de Middlebury College unos 1,8 centímetros más arriba de donde realmente está."

Entonces, ¿es importante la proporción áurea? Sin duda tiene un lugar en matemáticas, gracias a su conexión con la geometría, con Fibonacci y con algunas construcciones infinitas llamativas. Pero debemos ser cautelosos antes de proclamar que un número irracional concreto es psicológicamente placentero, está inscrito en los organismos biológicos o posee algún poder místico. Creo que el participante de un foro en línea llamado MartianInvader lo resumió

bien: “Los reportes sobre la genialidad de la proporción áurea suelen estar exagerados, pero aun así hay una buena dosis de genialidad allí.”

Jugando con la probabilidad

Del pódcast Mutación matemática 118

Recientemente, en círculos creacionistas ha circulado un argumento según el cual la probabilidad demuestra que la evolución no puede ocurrir, basándose en cálculos sobre las probabilidades de que la humanidad haya evolucionado frente a la cantidad de materia y de tiempo en nuestro universo. Cuando leí uno de estos razonamientos por primera vez, pensé que quizá tenían un punto; pero tras reflexionarlo un rato, mientras observaba el comportamiento simiesco de mi hija, me di cuenta de que había al menos tres fallas fundamentales. Empezaré describiendo el argumento: a ver si detectas los problemas antes de que yo los explique.

Una de las versiones más pintorescas de este razonamiento aparece en una publicación de Free Republic firmada por alguien llamado Brett Watson. Él intenta calcular la probabilidad de que unos monos tecleando al azar escriban la frase "To be or not to be, that is the question". Podemos coincidir en que cualquier forma de vida simple es al menos tan compleja como esa oración. Suponiendo un teclado básico de 32 teclas, la probabilidad de que un mono acierte cada uno de los 41 caracteres de la frase es 1 en 32^{41}: una probabilidad de 1/32 de acertar el primer carácter, $1/32^2$ de acertar los dos primeros, y así sucesivamente. Suponiendo que el mono escriba una línea por segundo, unos cálculos sencillos muestran que, incluso tecleando durante 17 mil millones de años, el mono tendría menos de una probabilidad en 10^{39} de lograrlo. Y si imaginamos 17 mil millones de galaxias, cada una con 17 mil millones de planetas, cada planeta con 17 mil millones de monos mecanógrafos, la probabilidad de éxito seguiría siendo menor a 1 en 10^{13}. La conclusión, según este argumento, es que la vida en general jamás podría surgir por azar.

La primera gran falla es quizás la más simple. Claro, puede que haya solo 1 entre 10^{39} probabilidades de que un universo particular desarrolle vida, pero ¿por qué resulta inconcebible que el número de planetas en el universo, o en el multiverso, sea de ese orden de

magnitud? Como mencionamos en un capítulo anterior, no tenemos forma de saber cuánto existe más allá de la frontera del espacio observable. Además, la interpretación de los "muchos mundos" en mecánica cuántica parece implicar un número exponencial de universos alternativos que se bifurcan a cada instante. Y aun si eso fuera incorrecto, y el número de universos fuese fijo y finito, tampoco tenemos modo de saber cuántos universos paralelos existen. Si admitimos la posibilidad de una gran porción inobservable de nuestro universo, o de universos paralelos, ¿por qué 10^{39} planetas habría de ser menos concebible que un puñado? El conocido principio antrópico establece que estamos observando uno de los pocos planetas o universos que sí desarrollaron vida, simplemente porque, de otro modo, no estaríamos aquí para observarlo.

Si esto no te convence, o aún te resulta confusa la idea de universos paralelos, un artículo de John Allen Paulos de 2006 señala una segunda falla. Miremos las formas de vida que conocemos: ¿de verdad creemos que son los únicos tipos de vida que podrían haber evolucionado? Tal vez existan muchas maneras alternas de construir vida a partir de químicos en nuestro universo, igualmente viables y capaces de reproducirse, que podrían haber surgido en su lugar; lo que ocurre es que nosotros observamos la que tuvo la suerte de evolucionar en nuestro planeta. Regresando a la analogía de los monos tecleando a Shakespeare: ¿de verdad tienen que escribir exactamente "To be or not to be, that is the question"? Quizá solo tenían que teclear cualquier oración válida en inglés, lo cual es mucho más fácil. Paulos usa la analogía de una baraja de cartas: si repartes las 52 cartas en orden, hay alrededor de 10^{68} posibles ordenamientos; pero en cualquier caso obtendrás algún ordenamiento al repartirlas. Luego podrías señalarlo y exclamar: "¡Vaya, solo había 1 entre 10 a la 68 de que saliera este orden —seres divinos debieron intervenir!" No sabemos cuántas maneras de formar vida existen exactamente, pero incluso dentro de los parámetros limitados de nuestro planeta, los científicos siguen encontrando sorpresas: vida en lugares antes considerados imposibles, como el hielo antártico o las fumarolas hidrotermales.

La tercera falla en el argumento de los monos es más sutil, pero quizá la más contundente: ignora por completo el concepto de

“supervivencia del más apto” en la evolución. En otras palabras, la evolución es un sistema de retroalimentación, donde las formas capaces de reproducirse se propagan, mientras que las inviables desaparecen. Esto se extiende incluso a los precursores de la vida, moléculas orgánicas capaces de autorreplicarse o de catalizar reacciones orgánicas. Así, cada evento en la evolución de la vida no es independiente: cuando las formas tempranas o sus precursores logran un éxito parcial, este se acumula en las etapas posteriores. Esto es crucial, ya que los cálculos de probabilidades diminutas se basan en multiplicar probabilidades independientes, lo cual solo es válido si los eventos son realmente independientes. Volviendo a la analogía de los monos, no solo se les permite producir cualquier oración válida en inglés: también hay un tipo con un látigo detrás de cada mono, castigándolo si empieza a escribir un carácter que no formaría parte de una oración. En este escenario, apostaría a que empezamos a obtener frases válidas bastante rápido. Suponiendo, claro, que los monos no se rebelen, asesinen a sus crueles amos y formen su propia sociedad no shakesperiana.

Entonces, ¿todo esto prueba que la evolución ocurrió, o que los creacionistas están equivocados? Me temo que esa discusión queda fuera del alcance de este libro, aunque puedes encontrar unos 10.000 pódcast en cada bando si te interesa, sin mencionar la incontable cantidad de guerras de comentarios en blogs. También es posible que futuros avances en biología y física invaliden los contraargumentos que he presentado aquí: quizá se demuestre de manera concluyente que solo existe uno o unos pocos universos, que solo hay una manera de que evolucione la vida, o que hay una brecha química insalvable entre la “sopa primordial” y los verdaderos precursores de la vida. Pero creo que puedes ver, a partir de estos puntos, que las objeciones probabilísticas simplistas a la evolución están omitiendo factores importantes. Si quieres defender el creacionismo frente a la evolución con base en el conocimiento actual, tendrás que buscar otros argumentos distintos a los de las matemáticas.

Resolver los problemas de Birmania

Del pódcast Mutación matemática 42

Al leer los numerosos artículos sobre la actualidad en Birmania, noté que en 1987 el líder Ne Win decidió reemplazar la moneda con billetes de 45 y 90 unidades, ya que su número de la suerte era el 9. Pero aquello llevó a protestas masivas y violencia, quizá debido a su interpretación de la economía y la política más cercana a la locura que a la razón, y contribuyó al movimiento opositor que continúa hasta hoy. Sin embargo, si asumimos por un momento que nuestros destinos son controlados por caprichosas deidades que examinan números arbitrarios en nuestras vidas y deciden ayudarnos según su correlación con nuestros números de la suerte, creo que el general se equivocó igualmente.

Al aprovechar los poderes del número 9, había otros aspectos que debería haber considerado. Tal vez hayas oído hablar de "eliminación de nueves", un método para comprobar cálculos aritméticos sumando los dígitos de todos los números, hallando el resto módulo nueve y verificando que el cálculo con restos coincida con el cálculo original. No haría daño imponerlo a todos: ¿qué podría ser más afortunado que revisar tus cuentas dos veces? Además, está el hecho de que seis nueves repetidos aparecen en las posiciones decimales de π, de la 762 a la 767. Así que, en cualquier cálculo con π, habría que exigir que se calcule con 767 cifras de precisión para maximizar ese factor de suerte. Quizá sea un fastidio, pero, al fin y al cabo, ¿qué es un poco de molestia en comparación con la suerte extra que brindan números tan auspiciosos? Finalmente, dado que 9 es el número atómico del flúor, habría que asegurarse de fluorizar el suministro de agua del país. Tras haber pasado por un tratamiento de conducto, yo siempre consideraré a los dientes sanos especialmente afortunados.

Pero hay un fallo fundamental en todas estas propiedades, excepto en la química del flúor: dependen de que usemos la representación habitual en base 10. Por ejemplo, si 9 es tu número de la suerte, ¿por qué 90 sería una buena unidad monetaria? Claro, 9 es un factor, pero

está multiplicado por 10, que puede o no ser particularmente afortunado. Según la lógica de Win, parecería que terminar en 0 añade suerte a un número. Pero si ese es el caso, ¿por qué restringirnos a la base 10? De hecho, con tanta actividad económica moderna (incluso en 1987) pasando por computadoras, creo que son más relevantes las representaciones binarias usadas en los sistemas digitales. Ahora bien, 90 en binario es 1011010, que termina en un 0, pero podemos hacerlo mejor. Cualquier número divisible por 8 termina en tres ceros en binario, ya que 8 es 2^3. Así que, si tomamos 9 por 8, o sea 72, en binario es 1001000, lo que lo hace tres veces más afortunado que 90. En otras palabras, por su superior "suertitud binaria", Ne Win debería haber escogido 72 como denominación principal de la moneda.

Pero demos un paso atrás. Nuestra elección de 72 o 90 se basa en algo superficial: cuántos ceros aparecen al final de un número en distintas representaciones. Si suponemos que existe un numerólogo que haya asistido a clases de matemáticas más allá de tercer grado, sabrá que los números también tienen propiedades más profundas, independientes de una representación en particular. Pensemos en las potencias: el 9 es especialmente auspicioso para esto, ya que al ser un cuadrado perfecto podemos tomar potencias enteras y semienteras y obtener enteros limpios como denominaciones monetarias. 9 elevado a 1,5 es 27; 9^2 es 81; y 9 a la 2,5 es 243. Si elegimos 9, 27, 81 y 243 como denominaciones, estaremos invocando los súper extra afortunados poderes del número 9, independientemente de la representación numérica elegida.

La conclusión es ineludible: la fuente de todos los problemas de Birmania en las últimas dos décadas es, obviamente, que están usando numerólogos incompetentes. Todo lo que tienen que hacer es contratarme, y gracias a mi superior entendimiento del número 9, devolveré al país al buen camino.

Una nueva numerología

Del pódcast Mutación matemática 128

Hace poco me divertí leyendo un artículo sobre "numerología", la técnica New Age según la cual tu personalidad se analiza a partir de aspectos de tu nombre o fecha de nacimiento. Un sistema numerológico típico funciona así: se asigna un número a cada letra de tu nombre, luego se suman todos los números, y después se siguen sumando los dígitos hasta obtener un total de una sola cifra. Por ejemplo, en mi nombre Erik, la E es la 5ª letra del alfabeto inglés, la R la 18ª, la I la 9ª y la K la 11ª. 5 + 18 + 9 + 11 da 43, y 4 + 3 es 7, de modo que soy una personalidad "7". Busco ese número en una tabla numerológica y encuentro que está asociado con la reflexión. Así que, supongo, debo de ser reflexivo.

Pero siendo reflexivo, no puedo evitar preguntarme: ¿por qué deberían existir apenas 9 tipos de personalidad para describir a todo el mundo? Claro que algunos sistemas numerológicos añaden complicaciones, como los "números maestros" 11, 22, 33 y 44 que no deben reducirse, pero aun así, parece que haría falta algo más. ¿Por qué no tratar cada posición individual de una letra como si tuviera su propio significado? Así es como permitimos que los números de varias cifras representen valores más grandes: por ejemplo, 123 es 3 veces 10^0, más 2 veces 10^1, más 1 vez 10^2. De ese modo, con solo tres dígitos del 0 al 9, podemos describir mil números diferentes. Si simplemente sumáramos 1, 2 y 3, no podríamos distinguir 123 de 321, y ambos serían equivalentes a 42 o 6. ¿No debería haber miles de tipos de personalidad, como mínimo? Si los dioses New Age usan nuestros nombres para codificar información vital sobre nuestras vidas, pensaría que al menos podrían aprovechar los mismos principios elementales de nuestro sistema posicional de números. Ojalá que la mayoría de esos dioses tengan la educación de sexto grado necesaria para entenderlo.

Ahora bien, si vamos a generar valores numéricos para describir nuestra personalidad, ¿de verdad tiene sentido basarlos en nuestros nombres? Un nombre es algo que puede cambiarse con facilidad, y que

a menudo resulta ambiguo si se traduce desde otro idioma. ¿Qué tal si sacáramos algo físico de nuestro cuerpo para generar un número grande, donde cada posición tuviera significado? ¿No sería estupendo que existiera algún aspecto consistente de nuestro organismo, algo dentro de nuestras células, que pudiéramos usar para obtener un número descriptivo?

Pues resulta que los biólogos se nos adelantaron. Dentro de cada célula hay largas hebras de ADN, básicamente cadenas de unos 3 mil millones de "pares de bases", cada uno compuesto por una de cuatro nucleobases y su complemento. Y como bien sabemos, esos genes determinan muchos aspectos de nuestros cuerpos y de nuestra personalidad. Así, podemos pensar en nuestras secuencias de ADN como números larguísimos en base 4 que nos describen con minucioso detalle. Se han identificado genes vinculados con características tan diversas como el color de ojos, la vulnerabilidad al cáncer o el grado de introversión o extroversión. De manera irónica, los numerólogos tenían razón desde el principio: cada uno de nosotros sí tiene un número único que nos describe con detalle y que puede ayudar a entender nuestra personalidad y nuestra salud. Es un poco más complicado que los que ellos suelen usar, pero estoy seguro de que no tendrán problema en corregir sus sistemas a la luz de la ciencia más reciente, ¿verdad?

De algún modo no estoy conteniendo la respiración esperando a que los sitios de numerología en línea corrijan sus sistemas basados en nombres y añadan enlaces a laboratorios de análisis genético. Pero quién sabe, quizá todo este asunto del ADN sea en realidad un truco de los espíritus oscuros para distraerme de comprender la verdad: que en el fondo soy un "Número 7", y que debo usar el poder de mi número para expulsar a los demonios de la Tierra.

Un gusano intestinal por niño

Del pódcast Mutación matemática 110

Casi todos hemos visto, de una forma u otra, imágenes desgarradoras de niños desfavorecidos en el mundo en desarrollo. Muchos viven en chozas hechas de tableros de aglomerado desechados o de chapa, con pisos que, como el camino de afuera, consisten en su mayor parte de barro. A menudo se ve a los niños jugando en la calle, con poco más que tierra y basura como juguetes. Observamos señales evidentes de enfermedad y desnutrición, como vientres hinchados. Y parece haber pocas señales de esperanza u oportunidad para los niños que crecen en estos entornos, salvo que se produzcan cambios fundamentales en su modo de vida. Así que, como occidentales ilustrados, nuestro deber es claro: debemos garantizar que cada uno de estos niños tenga una computadora portátil barata.

¿Cómo? ¿Que esa no es tu reacción? Bueno, antes de entrar en detalles, hablemos de un principio matemático básico relacionado con esto. La ley de Amdahl, formulada por el arquitecto de computadoras Gene Amdahl en 1967, señala que si tienes un proceso que puede descomponerse en muchos subprocesos, la mejora total que obtienes con alguna optimización está limitada por los subprocesos que sí puedes hacer más eficientes. Supongamos que tenemos subprocesos P1 y P2 que toman tiempos T1 y T2, y que no puedes mejorar P1, pero sí puedes hacer que P2 funcione n veces más rápido. Entonces, el tiempo total será T1 + (T2/n). Así que, si T1 es mucho mayor que T2, entonces incluso con un valor enorme de n, es decir, una mejora gigantesca en P2, todavía tendrás que correr con el tiempo completo de P1.

Para concretar, supongamos que tienes un programa que lee una lista de nombres y luego envía un correo electrónico a cada persona diciéndole que escuche Mutación matemática. Supongamos que leer el archivo toma 90 segundos, y enviar los correos 10 segundos. Si compras una nueva computadora multinúcleo que puede enviar correos a velocidad de rayo, mil veces más rápido que antes, pero no lee archivos más rápido, ¿cuál es la mejora total? Bueno, suponiendo que el

tiempo de envío ya es despreciable, el tiempo total pasó de 100 segundos a 90 segundos, lo que significa una aceleración de 100/90, es decir, alrededor de 1,1. No es ni de lejos las mil veces más rápido que prometía el vendedor, porque había una gran parte del proceso que no se mejoró.

¿Cómo se relaciona esto con resolver la pobreza mediante laptops? Admito que estoy forzando un poco la ley de Amdahl aquí, ya que mejorar la educación no es un proceso tan bien definido como un cálculo paralelo. Pero aceptemos por un momento que uno de los principales problemas en estas áreas del tercer mundo es la falta de oportunidades educativas, y que hay muchos factores que afectan la calidad de la educación. Supongamos también que nuestro objetivo es que, en la mayoría de los niños, se alcance un umbral educativo básico, con puntajes respetables en pruebas internacionales de matemáticas y alfabetización.

Estoy seguro de que hay muchos factores que afectan los puntajes en esas sociedades. Uno de ellos podría ser la falta de acceso a computadoras. Pero ¿hay otros que pesan más? Claro que el acceso a computadoras es algo positivo, pero debe considerarse junto con otros problemas posibles. Y, de acuerdo con la ley de Amdahl, los factores más grandes son en los que los donantes benéficos deberían concentrarse, ya que las mejoras en áreas menores tendrán un efecto limitado por naturaleza. Estos temas me vinieron a la mente al leer un artículo reciente en Miller-McCune sobre experimentos que comparaban la iniciativa Una portátil por niño con otros dos proyectos en zonas rurales de India. Uno consistía en financiar desparasitaciones, bajo el supuesto de que una gran parte del ausentismo escolar se debía a niños luchando contra gusanos intestinales. Otro abordaba el ausentismo docente, un enorme problema en áreas remotas: entregaban cámaras digitales a los maestros, que debían enviar cada día una foto con sus alumnos con fecha y hora para cobrar su sueldo. Ambos programas mostraron mejoras mucho más significativas en el rendimiento escolar que proveer computadoras. Al parecer, que los alumnos estén demasiado enfermos para ir a la escuela, o que su maestro no aparezca, perjudica la educación un poco más que la falta de tecnología.

¿Cuál es la lección? Que al analizar cualquier tipo de problema —en política pública tanto como en ingeniería— debemos tener siempre presente la ley de Amdahl. Para ser lo más efectivos posible, debemos considerar todos los factores e intentar estimar qué parte del problema total representan, en lugar de elegir una iniciativa particular vinculada a nuestras emociones o pasatiempos y hacer de ella prioridad. Cuando observamos de cerca lo que realmente se necesita, las respuestas pueden sorprendernos.

No quiero sonar demasiado cínico respecto de las iniciativas "sexys" propuestas por gurús tecnológicos para mejorar el tercer mundo: sin duda sus intenciones son buenas. Tal vez incluso hayan hecho estudios que contradicen los que yo leí, y realmente crean que la falta de computadoras es el factor número uno que frena la educación en el tercer mundo. Pero no he visto mucha evidencia de ello en los muchos artículos de prensa sobre la iniciativa Una portátil por niño. Creo que la ley de Amdahl y factores similares, más que los llamativos discursos emocionales, deberían ser un componente clave en cualquier discusión sobre estas iniciativas. Los periodistas tienen que hacer un mejor trabajo tratando de examinar los diversos factores que contribuyen al problema y mostrar sus pesos estimados en términos de impacto en el conjunto, para analizar de verdad cuáles son las mejores formas de dirigir los esfuerzos benéficos.

CAPÍTULO 8

Analizando las artes

Siempre ha habido una conexión íntima entre las matemáticas y las artes. Muchos de los entusiastas de las matemáticas que he conocido han mostrado un gran interés por diversas formas de arte. En la universidad, recuerdo que la mayoría de mis compañeros de carrera en matemáticas tocaban algún instrumento musical. Rudy Rucker, uno de los brillantes divulgadores que originalmente inspiraron Mutación matemática, es también un pionero literario del movimiento cyberpunk, además de dedicarse a la pintura como afición. Otra inspiración fue el clásico innovador de Douglas Hofstadter, Gödel, Escher, Bach, que exploraba los vínculos entre matemáticas, arte y música. Y como comentamos antes, Edwin Abbot introdujo la idea de la cuarta dimensión mediante una alegoría literaria, en lugar de una exposición árida.

Quizá el área más evidente de conexión entre matemáticas y arte sea la de las artes visuales y su estrecho vínculo con la geometría: la idea central de la perspectiva —que podemos obtener una impresión real en tres dimensiones al observar una simple superficie en 2D— siempre me ha maravillado. La música también es profundamente matemática, como reconocieron los antiguos griegos al descubrir la relación entre los tonos musicales y las proporciones numéricas. Aunque no sea tan obvio, incluso el estudio de la literatura puede beneficiarse de enfoques matemáticos. Los artículos de este capítulo deberían ayudarte a abrir la mente a las múltiples conexiones entre arte, música, literatura y matemáticas.

Descubriendo la tercera dimensión

Del pódcast Mutación matemática 135

Quizá recuerdes que, hace algunos capítulos, nos burlamos de ciertos cantantes populares que cambiaron una letra sobre descubrir la

cuarta dimensión por otra sobre descubrir la tercera. Esto me hizo pensar en cuándo la "tercera dimensión" pudo haber sido en realidad un descubrimiento. En sentido literal, es una pregunta absurda, ya que un ser humano que no fuera consciente de la tercera dimensión jamás podría levantarse de la cama para formularla. Pero, por otro lado, hay ámbitos en los que la tercera dimensión fue descubierta bastante tarde en la historia: en particular, en el arte. Todos hemos visto esas pinturas planas del antiguo Egipto en las pirámides, con esos ángulos disparatados de brazos, fruto de la total incapacidad para representar la profundidad. Luego, en algún momento, los artistas se dieron cuenta de que, prestando un poco más de atención a cómo debían verse las cosas, podían producir una vista con perspectiva realista de la tercera dimensión. ¿Cuándo ocurrió esto?

Empecemos por repasar lo básico de la perspectiva en el arte. Creo que los artistas siempre supieron de manera intuitiva que los objetos cercanos debían parecer más grandes que los lejanos, pero esto por sí solo no basta para crear la ilusión de tres dimensiones. Para lograrla, el artista necesita conceptualizar una línea del horizonte —la línea distante donde el cielo se une con la tierra— y uno o más puntos de fuga, donde las líneas paralelas parecen juntarse en la distancia. En esencia, el artista imagina el lienzo como una ventana hacia otro mundo, piensa en las trayectorias de los rayos de luz desde los objetos representados hasta el ojo del observador y pinta las imágenes en los lugares donde esos rayos impactarían en el lienzo. Como siempre, esto apenas roza la superficie; en línea puedes encontrar muchos más detalles.

Cuando empecé a reflexionar sobre este tema, asumí que estaría investigando desarrollos del Renacimiento temprano, según mis vagas memorias de las clases de secundaria. Pero me sorprendió descubrir que, en realidad, la perspectiva en el arte fue descubierta por los griegos en el siglo V a.C. La técnica parece haberse originado con un pintor de escenarios llamado Agatárquides, que intentaba crear fondos realistas para las obras de Esquilo. Algunas fuentes mencionan que ya en el siglo anterior había ejemplos de perspectiva en vasos pintados, así que quizá no fuera del todo original. En cualquier caso, Agatárquides debía de ser muy talentoso para su época y estaba muy solicitado:

según una anécdota, el prominente general Alcibíades lo retuvo prisionero en su casa durante tres meses y lo obligó a pintarla. Tal vez Alcibíades hubiera tenido una mala experiencia previa con un contratista que abandonó el trabajo; este es un aspecto de la sociedad humana que probablemente se ha mantenido constante durante miles de años.

La ilusión realista de tres dimensiones en un decorado era tan llamativa que atrajo la atención de matemáticos y filósofos destacados de la época. Según el historiador romano Vitruvio, las pinturas de Agatárquides "llevaron a Demócrito y Anaxágoras a escribir sobre el mismo tema, mostrando cómo, dado un centro en un lugar definido, las líneas debían corresponder naturalmente con el punto de vista y la divergencia de los rayos visuales, de modo que mediante este engaño se lograra una representación fiel de la apariencia de los edificios en la escenografía pintada, y que, aunque todo se dibujara en una fachada plana y vertical, algunas partes parecieran retirarse al fondo y otras sobresalir al frente".



Figura 8-1. Fresco en Pompeya mostrando la perspectiva. [8]

Lamentablemente, no tenemos ejemplos supervivientes de las pinturas de Agatárquides, ni de los textos relacionados, aunque la descripción de Vitruvio es lo bastante clara como para no dejar dudas sobre el descubrimiento griego. Además, sí contamos con pruebas visuales de que los antiguos conocían la técnica: en las ruinas de Pompeya, del siglo I d. C., se hallaron pinturas que muestran claramente el uso de la perspectiva. Es probable que fueran copias de originales griegos. Al verlas, uno se sorprende de que procedan del mundo antiguo.

Así que las letras modificadas de "As Time Goes By" tendrían sentido, si Binnie Hale y Rudy Vallee hubieran nacido hacia el siglo V a.C. Por otro lado, deberíamos haber aprendido ya que es una pérdida

de tiempo intentar encontrarle sentido a las letras del pop.

Una nueva perspectiva sobre la perspectiva

Del pódcast Mutación matemática 154

Hace poco me encontré con una referencia pasajera a una afirmación del teórico del arte moderno Marshall McLuhan, del siglo XX, que sostenía que la perspectiva visual no es un aspecto inherente al arte, sino un artefacto cultural de nuestra sociedad. En otras palabras, la ausencia de perspectiva en el arte primitivo no sería un signo de falta de sofisticación, sino el resultado de otra cosmovisión cultural, de elecciones distintas, que no les habían enseñado a ver el mundo de un modo en que la perspectiva tuviera sentido. Para un miembro de una cultura que no usaba esa técnica, el arte con perspectiva sería incomprensible hasta que le enseñaran a entenderlo como representación de la realidad. Al encontrar esto un poco disparatado, decidí investigar en la web si de verdad la gente podía creerlo. ¿Las representaciones realistas con perspectiva son solo algo que hemos aprendido culturalmente a esperar, y no un paso fundamental en la madurez artística?

Como vimos en la sección anterior, la perspectiva artística es un conjunto de métodos para representar de manera realista el mundo tridimensional en un lienzo bidimensional. Utiliza conceptos como la línea del horizonte y los puntos de fuga para crear la ilusión de estar contemplando una escena como si el observador estuviera realmente allí. Aspectos de la perspectiva se veían ya en el arte occidental en el siglo V a.C., aunque un enfoque sistemático basado en la geometría no comenzó hasta el Renacimiento. Que la perspectiva tenga una estrecha relación con la cultura es indiscutible; la visión objetiva de la realidad que conduce a la perspectiva fue también la base de la cosmovisión científica que permitió el desarrollo de la ciencia moderna.

Hay que señalar que estas técnicas no son perfectas: en el mundo real, por ejemplo, la verdadera línea del horizonte es curva debido a la curvatura terrestre. También debemos lidiar con la forma naturalmente curva de nuestros ojos, que altera ligeramente cómo llegan las imágenes. Además, ninguna pintura no holográfica puede reproducir

con exactitud la visión tridimensional que obtenemos de nuestros dos ojos al mismo tiempo. Es cierto también que algunas culturas atribuían otros fines al arte; por ejemplo, en las obras egipcias y bizantinas, las figuras se colocaban y dimensionaban según su importancia social, en lugar de intentar una visión realista. Pero creo que es innegable que el arte renacentista perseguía una tarea concreta —la representación realista del mundo— en un nivel mucho más avanzado que esas otras tradiciones.

McLuhan y sus colegas parecen tener preocupaciones más de fondo. Quejándose de las limitaciones de la perspectiva, hacen afirmaciones como: "cerrar un ojo y mantener la cabeza quieta en un punto predeterminado en el espacio no es la forma normal de mirar las cosas". Pero van más allá. McLuhan escribió una vez: "lejos de ser un modo normal de la visión humana, la perspectiva tridimensional es un modo adquirido convencionalmente de ver, tan aprendido como lo es reconocer las letras del alfabeto o seguir una narración cronológica". Consideran la perspectiva como un código pictórico que hemos aprendido a descifrar en nuestra cultura. El crítico de arte Herbert Read añadió que la perspectiva "es solo una forma de describir el espacio y no tiene validez absoluta".

Su mayor preocupación parece ser que el arte con perspectiva separa al espectador del objeto observado. El crítico Robert Romanyshin escribió: "El pintor (y el espectador) imagina que mira al sujeto a pintar (el mundo que ha de ser visto) como si fuera a través de una ventana... La condición de la ventana implica un límite entre el perceptor y lo percibido. Establece como condición para la percepción una separación formal entre un sujeto que ve el mundo y el mundo que es visto; y al hacerlo sienta, por así decirlo, las bases de ese retraimiento del yo frente al mundo que caracteriza el amanecer de la era moderna".

Y creo que en última instancia esto es lo que McLuhan y sus colegas buscan: usar esta curiosa filosofía del arte al servicio de una nueva visión más holística del mundo. Está en sintonía con el movimiento New Age moderno, con sus muchas quejas de que la ciencia objetiva omite algo y de que necesitamos vernos como parte de la naturaleza y la realidad, en lugar de observarlas desde fuera con lógica fría. Va de la

mano con la tendencia a idealizar las culturas primitivas y rechazar el progreso científico. Aunque muchos posmodernos encuentran esta visión emocionalmente satisfactoria —y refutarla está muy lejos del alcance de este libro—, a mí me resulta poco convincente. No veo cómo miles de páginas de discusión filosófica puedan contradecir el simple hecho de poner lado a lado una pintura primitiva, una renacentista y una fotografía.

Pero es divertido hacer un pequeño experimento mental y aceptar por un momento la proposición de que interpretar el arte con perspectiva como un mundo tridimensional es algo que solo hemos aprendido culturalmente. ¿Y si existiera algún modo ingenioso de representar figuras de cuatro dimensiones en un lienzo que nuestra cultura aún no haya descubierto? Tal vez nuestra incapacidad de visualizar objetos en 4D sea solo consecuencia de nuestras limitaciones culturales actuales, y no de una limitación biológica. En algún momento propicio, un estudiante de posgrado del Pratt Institute pintará de repente una obra que nos haga ver la cuarta dimensión de manera clara y lógica. Desde ese instante, podremos visualizar la geometría en cuatro dimensiones con facilidad, y nos reiremos de nuestros antepasados primitivos cuya comprensión visual estaba limitada a tres dimensiones. Las ilustraciones en 4D se volverán comunes, y después del trabajo nos relajaremos jugando aventuras en Wii 4D. En ese momento, tendré que pedirle disculpas a McLuhan.

La venganza de Hipaso

Del pódcast Mutación matemática 142

La relación entre las matemáticas y la música fue descubierta hace más de dos mil años, por el matemático griego Pitágoras. La leyenda cuenta que un día, mientras paseaba cerca de una herrería, notó que el repiqueteo de los martillos sobre los yunques tenía una cualidad musical, con notas que dependían del peso de los martillos, y que ciertos pares sonaban mejor juntos si sus pesos estaban en razón de números enteros. Numerosos autores han señalado que esta historia es bastante inverosímil: sin una medición y construcción cuidadosa de martillos y yunques —cosa poco probable en un herrero— es casi imposible que llegaran a armonizar bien. Es mucho más probable que la observación proviniera de experimentar con las cuerdas de la lira de Pitágoras, un instrumento de cuerda de la antigua Grecia.

Pitágoras observó que, si hacía vibrar cuerdas cuya longitud guardaba una proporción de números enteros, sonaban bien juntas. Y que si dos cuerdas estaban en razón 2:1, sonaban especialmente armoniosas, siendo en cierto sentido la "misma nota" en distintas octavas. ¿Por qué ocurre esto?

Bueno, recordemos cómo viaja el sonido por el aire: seguramente has visto dibujos de ondas sonoras, con picos y valles a intervalos regulares, que son interpretados por el oído humano. Si dos ondas tienen frecuencias en razón de números enteros, se sincronizan periódicamente, coincidiendo algunos picos. Por ejemplo, supón que tocas un La a 110 Hz, y luego otro La una octava más alto, a 220 Hz. Si lo piensas y dibujas las ondas, verás que cada pico de la nota más grave coincide con un pico de la más aguda. Para el oyente, esto produce un efecto agradable, y las notas suenan bien juntas. Otras razones como 3:2, 5:4, etc., también generan efectos agradables, al coincidir periódicamente los picos y valles de las ondas, formando distintos acordes y estructuras musicales. El sistema conocido hoy como afinación pitagórica se basaba en utilizar frecuencias en razón 3:2, que resulta muy placentera para nuestros oídos.

Una vez descubiertas estas relaciones, los pitagóricos llevaron la idea a extremos que hoy nos resultan un tanto extraños. Observaron las distancias aparentes de los planetas conocidos a la Tierra y concluyeron que esas proporciones debían formar una "música de las esferas", una sinfonía cósmica interpretada por los dioses. Considerando la capacidad de esas proporciones matemáticas para evocar emociones, también creían que la música poseía el poder de sanar. En los grandes centros médicos de la antigua Grecia, el tratamiento siempre se acompañaba de música apropiada. Más tarde, el filósofo romano Boecio explicó esto diciendo que el cuerpo y el alma estaban sujetos a las mismas leyes de proporción que el cosmos.

Sin embargo, hay fallas básicas en construir escalas musicales basándose únicamente en proporciones enteras. Una es que el uso de razones de números pequeños provoca que las frecuencias queden espaciadas de manera desigual en la escala. Otra es que queremos una escala en la cual, partiendo de una nota arbitraria, sea posible reproducir proporciones agradables en cada octava. Por ejemplo, si tenemos un La a 440 Hz, queremos tocar 660 Hz para la proporción 3:2, y luego 990 Hz también. Pero la nota de 990 Hz podría resultar demasiado aguda según el instrumento que usemos, así que convendría bajar una octava y tocar 495 Hz. Entonces necesitamos sumar una razón de 3:2 a esos 495 Hz, obteniendo 742,5. Y pronto nos veríamos atrapados en un bucle infinito, teniendo que añadir más teclas al piano y más dígitos a los cálculos.

Para resolver esto, los músicos de los últimos siglos desarrollaron las escalas temperadas iguales, donde la razón de frecuencias entre notas adyacentes es la raíz doceava de 2. Así, tras doce notas llegamos exactamente a la siguiente octava. Aunque los pasos intermedios no coincidan con exactitud con proporciones enteras, alcanzan aproximaciones bastante cercanas. Por ejemplo, cuatro pasos en la escala dan una razón igual a la raíz cúbica de 2, aproximadamente 1,2599. Esto está lo bastante cerca de 5/4, o 1,25, como para sonar bien cuando se necesita, aunque el número real sea irracional. Resulta irónico, ya que el discípulo de Pitágoras, Hipaso de Metaponto, fue ejecutado por demostrar que la raíz cuadrada de 2 es irracional. Ahora que la escala temperada es de uso común, seguramente Pitágoras debe

de estar revolviéndose en su tumba.

Inaudible pero divertido

Del pódcast Mutación matemática 87

Últimamente he estado leyendo un libro del compositor clásico del siglo XX John Cage. Es más famoso por su pieza titulada 4 minutos 33 segundos, que consiste en cuatro minutos y 33 segundos de silencio. Dependiendo de a quién se pregunte, fue una hazaña intelectual y artística… o un cínico intento de demostrar la ingenuidad de un público amante del arte de vanguardia. Yo me inclino por lo segundo, pero eso no es lo que más me interesa de Cage. Él utilizaba explícitamente patrones e ideas matemáticas para construir su música, y era muy meticuloso en documentar sus métodos.

Además de su obra silenciosa, otro rasgo famoso de su música era el uso de operaciones de azar, o generación de números aleatorios. Uno de los métodos que más le gustaba, en composiciones como Music of Changes y Two Pastorales, era decidir las notas y duraciones de una pieza basándose en el I Ching, un sistema chino antiguo esencialmente equivalente a generar números aleatorios del 0 al 63, aunque envuelto en mucho lenguaje místico. Un método aún más extraño para generar aleatoriedad, empleado en su Music for Piano 1-3, consistía en crear notas a partir de "imperfecciones en el papel sobre el que se escribía la pieza". Incluso en su célebre 4 minutos 33 segundos, la elección de la duración de la obra fue determinada por un procedimiento aleatorio.

También le gustaba combinar estas operaciones aleatorias con otros tipos de patrones. Una idea recurrente en sus composiciones era asociar espacio con tiempo. En lugar de usar notación musical estándar para especificar duraciones, indicaba al inicio de cada página cuánto espacio en el papel debía corresponder a un segundo de tiempo. Al darse cuenta de que esto podía confundir a los músicos que intentaran ejecutar la pieza, añadía notas como: "Cuando estas [instrucciones] no estén claras, el pianista es libre de decidir qué hacer". En su composición Music Walk fue aún más lejos, con instrucciones como: "Las lecturas se toman de un rectángulo transparente con cinco líneas paralelas colocado en cualquier posición sobre una hoja con puntos…

La relación entre puntos y líneas se interpreta relativamente con respecto a cualquier característica del sonido o la acción". Y por si esto no fuera suficiente, en otra pieza llamada Renga usó el I Ching para elegir entre varios dibujos de Henry David Thoreau, que el intérprete debía luego traducir en música, con el espacio vertical representando la altura de las notas y el horizontal el tiempo. Otros arreglos espaciales que Cage tradujo en música incluyeron tableros de ajedrez —con la partida en curso durante el concierto— y mapas astronómicos de estrellas.

Es fascinante leer sobre los métodos de Cage para producir música, pero un tanto decepcionante escuchar los resultados. En realidad, "decepcionante" es quedarse corto; en mi opinión, preferiría escuchar a mi gato mientras lo vacunan antes que un CD típico de Cage. No soy el único en pensar así; en uno de sus conciertos en vivo, un conocido suyo se levantó y gritó: "John, te quiero con locura, pero no soporto ni un minuto más", antes de salir del lugar. Creo que este es el tipo de música que resulta mucho más interesante comentar que escuchar. Aunque he conocido a eruditos serios de la música que aseguran que Cage siempre utilizaba su propia intuición musical para disciplinar los resultados del azar, y que, una vez adquirida la sensibilidad necesaria, sus obras se encuentran entre las más bellas de la música clásica. Creo que me fiaré de su palabra… y pondré mi lista de David Bowie en el iPod mientras leo mi próximo libro de Cage.

Cómo suena un planeta

Del pódcast Mutación matemática 29

Seguramente hayas oído la frase “música de las esferas”. Suena elegante y místico si la mencionas, pero lo que realmente significa es otra cuestión. Este concepto, atribuido a Pitágoras y sus seguidores en la antigua Grecia, sostiene que los patrones matemáticos en los movimientos de los planetas y otros cuerpos celestes forman una especie de “música” metafórica. Supongo que matemáticas y música son ambas formas de pensamiento abstracto que observan y exploran patrones interesantes. Algunos compositores, como Holst en Los planetas, intentaron crear experiencias artísticas inspiradas en esta supuesta música. Pero siempre me ha parecido una metáfora un tanto forzada.

Navegando en la web recientemente, me intrigó ver que un compositor llamado Greg Fox ideó un modo de usar algunos trucos matemáticos para traducir literalmente el movimiento de los planetas en música. Una propiedad bien conocida de la física musical es que, si observamos la frecuencia de una nota, la forma de llegar a la misma nota en la siguiente octava es duplicar la frecuencia. Así, por ejemplo, la frecuencia de 1760 Hz la oímos como la nota La; si la duplicamos a 3520 Hz, oímos otro La una octava más alto. Para el oído humano, estos sonidos parecen pertenecer juntos y, en cierto sentido, ser la misma nota.

Ahora piensa en un planeta orbitando alrededor del sol. Como una órbita planetaria es un fenómeno periódico, tiene una frecuencia, igual que los sonidos en el aire. Claro que es una frecuencia muy baja. La Tierra completa una órbita alrededor del sol en 365,25 días, o 31.557.600 segundos. Para obtener la frecuencia en hercios, o número de veces que la Tierra orbita en un segundo, invertimos este valor y obtenemos aproximadamente $3{,}169\times10^{-8}$. Evidentemente, esto está muy por debajo del rango audible por el oído humano. Pero al duplicarlo repetidamente —manteniendo la misma nota en octavas superiores—, finalmente llegamos a unos 34,025 Hz, una nota real que

sí podemos escuchar. En cierto modo, esta nota representa verdaderamente el “tono” de la órbita terrestre.

Fox calculó los tonos musicales característicos asociados a cada planeta y los utilizó para componer su obra Carmen of the Spheres. Esto le impuso una fuerte restricción, al disponer solo de nueve tonos, pero como él mismo escribe en su sitio web, este minimalismo es decisión del Universo, no suya. Quizá los descubrimientos recientes de planetas enanos adicionales puedan servir para enriquecer un poco su música en la próxima versión.

¿Y cómo suena esta música? Personalmente, la pondría en la misma categoría que John Cage, Arnold Schoenberg o Captain Beefheart: música mucho más interesante de comentar que de escuchar. Pero puedes descargar la pieza en línea y juzgar por ti mismo. Tal vez yo sea simplemente un friki que no lo entiende. En cualquier caso, sigue siendo divertido pensar en el hecho de que los planetas sí tienen notas musicales características.

Mozart tira los dados

Del pódcast Mutación matemática 54

Apuesto a que muchos de ustedes, como yo, aprendieron a programar computadoras en la adolescencia y se sintieron fascinados la primera vez que lograron que salieran sonidos de los parlantes. Si son como yo, escribieron pequeños programas que generaban y reproducían tonos musicales al azar, con la esperanza de que, si se ejecutaban suficientes veces, acabarían produciendo una melodía brillante que los convirtiera en el próximo David Bowie. Y probablemente, al cabo de un tiempo, se dieron cuenta de que generar buena música al azar era mucho más difícil de lo que parecía. Es como la teoría de los monos escribiendo a Shakespeare: quizá suceda algún día, pero tardaría muuucho tiempo.

Sorprendentemente, en los días clásicos del siglo XVIII, mucho antes de la era de las computadoras, crear música mediante tiradas de dados era una moda en Europa. Compositores célebres como Haydn y Mozart publicaron sistemas en los que se podían lanzar dados para decidir cómo ensamblar una gran cantidad de compases posibles y así producir al azar una pieza de música clásica. Proveían un amplio conjunto de fragmentos musicales ya escritos, combinados con tablas que indicaban cuál insertar en cada punto según los resultados de un par de dados. Ahora bien, no está del todo claro cuán en serio se tomaban estos juegos los grandes compositores: Haydn tituló su sistema publicado “La broma filarmónica” y Mozart lo publicó de forma anónima. De hecho, aún existe controversia sobre si Mozart fue realmente el creador de su sistema de composición aleatoria: la entrada de la Wikipedia y otra página web que encontré no se ponen de acuerdo en si él fue de verdad el autor.

¿Por qué, en una época en que se componía música grandiosa de manera deliberada, los compositores sentían la necesidad de publicar sistemas que permitieran a cualquiera crear composiciones al azar? Una teoría interesante es que, en ese tiempo y lugar, se esperaba que las clases educadas fueran capaces de componer pequeñas piezas

musicales, del mismo modo que se esperaba que supieran escribir cartas o pronunciar discursos. Pero, como es de suponer, la mayoría de esas piezas creadas por gente común eran bastante malas. Al usar el sistema de Mozart o Haydn para elegir un conjunto adecuado de compases prefabricados, al menos podían tener una oportunidad de obtener algo medianamente escuchable. Piénsalo como recurrir a imágenes prediseñadas en una presentación en lugar de intentar dibujar todo uno mismo. Y si el lanzador de dados tenía un poco de talento, podía usar los compases enlazados al azar como núcleo de una obra mayor que completara por su cuenta.

En la mitad del siglo XX, estas ideas de música generada aleatoriamente fueron retomadas por compositores de vanguardia como John Cage, como mencioné antes. En general, todavía no he escuchado una pieza creada por métodos aleatorios que realmente disfrute. Incluso algunos admiradores de Cage con los que he hablado admiten que sus mejores obras supuestamente aleatorias no son verdaderamente aleatorias: la aleatoriedad podía servir como inspiración inicial o como vía de escape para el bloqueo creativo, pero lo que creaba música realmente grande era la inspiración y la intervención consciente del compositor. El verdadero talento de Cage consistía en modificar a mano los resultados aleatorios cuando era necesario. Ésa es probablemente una de las razones por las que estos juegos musicales de dados terminaron pasando de moda en el período clásico, y por las que incluso en el siglo XX la música generada al azar no se discute mucho fuera de ciertos círculos artísticos elitistas.

El cálculo de Cándido

Del pódcast Mutación matemática 83

Si eres como yo, seguramente recuerdas la novela satírica Cándido de Voltaire como una de las lecturas más disfrutables —o al menos tolerables— del siglo XVIII que te obligaron a leer en la escuela secundaria. Su trama rápida y bastante absurda gira en torno a un joven instruido por un filósofo optimista llamado Pangloss. Este insiste en que vivimos en el mejor de los mundos posibles, a pesar de perder un ojo y una oreja, contraer sífilis, ser vendido como esclavo y atravesar desastres como incendios, terremotos y tsunamis. Pero, ¿sabías que la filosofía parodiada en Pangloss está directamente relacionada con el desarrollo del cálculo?

La conexión surge del hecho de que Gottfried Leibniz, el coinventor del cálculo, fue también un filósofo muy respetado. Recordarás que uno de los logros clave del cálculo es la capacidad de encontrar el valor máximo de una función. Esto funciona porque el cálculo nos permite observar la pendiente de una curva —qué tan rápido sube o baja— en un punto infinitesimal. Cuando una curva deja de subir y está a punto de descender, su pendiente es 0, y allí alcanza un máximo local. Así, si puedes calcular un punto en el que la pendiente es 0, puedes encontrar un máximo.

En matemáticas, esta idea no es muy polémica. Pero Leibniz extendió este logro al ámbito de la filosofía. Como premisa básica, partía de su fe cristiana, que afirmaba que existía un Dios omnisciente y omnipotente que diseñó el universo. Muy probablemente, un Dios omnisciente —que todo lo sabe— conocería cálculo, y seguramente una especie de supercálculo divino mucho más poderoso que el desarrollado por Leibniz. Y, siendo omnisciente, también conocería todas las variables que describen el universo y sería capaz de definir alguna función infinitamente compleja que midiera cuán bueno es el universo. Como además Dios debe poseer bondad infinita, es lógico suponer que aplicaría su supercálculo a esa función de bondad del universo y obtendría un máximo global. Por lo tanto, si algo local parece

malo, es sólo porque, en combinación con otras variables, necesita ser así para alcanzar la máxima bondad total, el resultado óptimo.

Me resulta difícil discutir con este razonamiento, siempre que aceptes las premisas de Leibniz. En los siglos posteriores, se han definido muchas funciones complicadas que no sabemos optimizar en un tiempo razonable, pero Dios conocería todas las técnicas matemáticas necesarias y no se preocuparía por los límites de tiempo. Al fin y al cabo, si existe un ser divino todopoderoso que disfruta creando universos, bien puede tomarse su tiempo, incluso si le lleva varios eones ejecutar un algoritmo de optimización imposible para nosotros.

Así que, si tu religión admite la existencia de un Creador benevolente, omnipotente y omnisciente, entonces Leibniz y Pangloss tenían razón: realmente vivimos en el mejor de los mundos posibles.

Fractales en el sombrero

Del pódcast Mutación matemática 91

Hace poco me encontré con un curioso artículo en la web de un investigador llamado Akhlesh Lakhtakia, de la Universidad Estatal de Pensilvania, que afirmaba que el clásico infantil de Dr. Seuss El gato en el sombrero regresa le ayudó a comprender los fractales. De ser así, sería un logro notable por parte de Seuss, ya que escribió décadas antes de que los fractales fueran nombrados o estudiados de forma amplia, incluso en círculos matemáticos. Pero el uso de la recursión repetida en el libro sí ofrece analogías interesantes con los fractales, así que pensé que valía la pena revisar el argumento de Lakhtakia.

Para empezar, repasemos el concepto de fractal. A un nivel básico, un fractal es un objeto infinitamente complejo, generalmente no describible mediante geometría euclidiana simple, que es infinitamente autosimilar y generado por un algoritmo recursivo. La propiedad de autosimilaridad significa que puedes observar una pequeña parte y se parece a una versión en miniatura del todo. El hecho de estar generado por un algoritmo recursivo significa que, aunque un fractal sea infinitamente complejo, no es tan difícil de describir. Cada paso en su construcción se define a partir del anterior mediante una extensión bien clara. Muchos fenómenos en la naturaleza, como la forma de las cordilleras o de plantas pequeñas como los helechos, parecen asombrosamente similares a fractales, lo que ha llevado a múltiples aplicaciones útiles.

Hagamos esto más concreto revisando la definición de uno de los fractales más sencillos: el copo de nieve de Koch, que ya comentamos en el capítulo 4. Dibuja un triángulo equilátero. Ahora, en el tercio central de cada lado, dibuja otro triángulo equilátero que sobresalga hacia afuera, de un tercio del lado del triángulo original. En este punto deberías ver una estrella de seis puntas. Luego repite el proceso en cada borde de esa estrella, agregando triángulos más pequeños que sobresalgan. Repite esto un número infinito de veces. Por supuesto, nunca podrás terminar de dibujarlo, pero llegará un momento en que

estarás trazando líneas tan finas que se hallarán en el límite de lo perceptible, lo cual ya es una buena aproximación. (Aunque, si eres muy riguroso, por favor espera a terminar este libro antes de dibujar tu número infinito de triángulos, ya que podría llevarte un buen rato). Verás una figura que parece un copo de nieve muy complejo.

Entonces, ¿cómo utiliza fractales El gato en el sombrero regresa? Bien, por si no recuerdas la historia, este libro gira en torno a los intentos del Gato de limpiar un desastre que provoca durante su visita a unos niños desafortunados. Al darse cuenta de que necesita ayuda, se quita el sombrero para revelar al Gatito A, una réplica en miniatura de sí mismo que vive dentro de su sombrero. El Gatito A, a su vez, se quita el sombrero y revela una versión aún más diminuta de sí mismo, llamada Gatito B. Y así continúa la secuencia a lo largo del libro, hasta que finalmente el Gatito Z es tan pequeño que ni siquiera puede verse. Pero, curiosamente, esa pequeñez resulta ser una ventaja para limpiar manchas diminutas e inaccesibles.

Creo que ya puedes ver la semejanza con el copo de nieve de Koch: así como en el fractal se van añadiendo triángulos a los triángulos previos, en el libro se van revelando gatitos cada vez más pequeños bajo el sombrero. El Gato cumple algunas de las propiedades clave de los fractales: los gatitos se revelan mediante una definición recursiva simple, una réplica exacta bajo el sombrero del anterior, y la autosimilaridad también se cumple, ya que el proceso es esencialmente el mismo tanto si comienza en el Gato original como en uno de los Gatitos con letra. El autor Philip Neil, en The Annotated Cat, señala una diferencia sutil: normalmente, en los fractales, cada nivel más fino de detalle crea múltiples copias del nivel anterior, y de ahí surge la complejidad infinita. En el copo de Koch, por ejemplo, en cada paso se añaden más triángulos que en el anterior, porque se generan más bordes. Como en El gato en el sombrero regresa solo aparece un Gatito en cada paso de recursión, y la secuencia termina en el Gatito Z, la complejidad no aumenta de la misma manera.

Entonces, ¿anticipó realmente Dr. Seuss la noción de fractales? Probablemente no. Pero eso no significa que El gato en el sombrero regresa no pueda ser una excelente metáfora para explicar los conceptos básicos de autosimilaridad y definiciones recursivas, así

como la idea matemática general de la recursión, que aparece tanto en fractales como en disciplinas no relacionadas como la teoría de conjuntos, la lingüística y la informática. Así que creo que Lakhtakia tenía razón: el Gato puede ser una metáfora útil para introducir los fractales. Y, por supuesto, nunca necesitas una excusa para disfrutar un libro del Dr. Seuss con tus hijos.

¿Matemática o no matemática?

Del pódcast Mutación matemática 125

Hace poco leí un libro sorprendente de Douglas Hofstadter, autor de clásicos matemáticos como Gödel, Escher, Bach y Metamagical Themas. El libro se titulaba Le Ton Beau de Marot y trataba sobre los conceptos y desafíos de la traducción literaria. Al principio me pareció extraño que eligiera un tema que parecía tan alejado de sus áreas habituales. Pero en realidad, la traducción literaria, especialmente la poética, se encuentra en un cruce fascinante entre matemáticas, lenguaje y arte.

Algunos podríamos partir de la visión ingenua de que traducir es un proceso puramente matemático: tomar el conjunto de símbolos de una lengua y transformarlos, según una función bien definida, en otra lengua. Pero si alguna vez has usado un traductor automático como google.com/translate para traducir un párrafo de inglés a otro idioma y de vuelta, probablemente te diste cuenta enseguida de que había algo más en juego. Como ejemplo, Hofstadter se centra en un breve poema francés titulado À une damoiselle malade, de Clément Marot, escrito desde la perspectiva de un poeta que intenta animar a su amada, enferma en un hospital.

Los primeros versos del poema son:

Ma mignonne,
Je vous donne,
Le bonjour,
Le séjour,
C'est prison…

Puedes ver que, además de las palabras literales, existe aquí una estructura matemática muy formal: cada verso tiene tres sílabas, el acento cae en la última sílaba, cada dos versos riman, etcétera. Para traducirlo adecuadamente, no basta con encontrar palabras equivalentes: es necesario imitar también esta estructura. En efecto, se trata de hallar la intersección de dos funciones: una que asigna palabras a otras correspondientes, y otra que asigna estructuras poéticas a estructuras equivalentes. Google fracasa estrepitosamente, arrojando lo

siguiente:

My darling,
I give you,
Hello,
Sojourn
is prison.

No solo desaparecen prácticamente todos los elementos estructurales, sino que las palabras mismas resultan poco acertadas. Quizá el ejemplo más chocante sea “Le séjour” traducido como el extraño e inadecuado “sojourn”, en lugar de una palabra o frase más común que encaje con el tono general. No basta con atender a la estructura: el traductor debe escoger entre múltiples opciones posibles, con distintas connotaciones y resonancias en inglés.

A lo largo del libro, Hofstadter analiza muchos otros intentos de traducir el mismo poema, cada uno exitoso en algunos aspectos y fallido en otros. Por ejemplo:

Gentle gem,
Diadem,
Ciao! Bonjour!
Heard that you’re
In the rough

Esta versión se toma bastantes libertades con el significado literal, sustituyendo los primeros versos por analogías de joyas, pero logra algo similar en el ritmo. Otro intento pone el poema en un lenguaje contemporáneo e informal, con aún más licencias para mantener la estructura:

Babe o’ mine,
Gal divine,
Here’s a kiss,
It ain’t bliss
Bein’ sick.

Y otro más lo redirige hacia la esposa fallecida de Hofstadter, enfocándose en sus últimos días en el hospital:

Carol dear,
Here's some cheer
From your beau
Lying low
Has been tough

El libro contiene muchos más experimentos, y resulta fascinante ver cómo, en cada caso, se hacen distintos compromisos: sacrificar fidelidad literal para mantener la métrica, o viceversa. Así, vemos que el proceso formal o "matemático" de encontrar correspondencias lingüísticas y estructurales es solo el punto de partida de un empeño artístico para representar de verdad la obra original.

Como siempre, Hofstadter aprovecha la traducción del poema como excusa para largas e interesantes disquisiciones sobre el lenguaje, la mente y temas afines. Los problemas de la traducción tienen implicaciones claras para la inteligencia artificial: incluso si una computadora pudiera modelar estructuras internas que consideremos "inteligentes", expresarlas de forma comprensible para los humanos es, en esencia, un problema de traducción.

El libro también me dio una nueva apreciación de los desafíos tanto matemáticos como artísticos de traducir. Por ejemplo, ¿cuántos de nosotros leemos el nombre del director con reverencia cuando asistimos a un concierto clásico, pero apenas reparamos en el crédito al traductor al leer un libro en lengua extranjera? Sin embargo, traducir un libro no consiste meramente en hallar palabras equivalentes, sino en tomar decisiones artísticas entre múltiples opciones aceptables para ser fiel a la intención del autor. Podría decirse que este reto es incluso mayor que el de interpretar una pieza musical, que en cierto sentido ya está completamente especificada en la partitura.

Gnovelas retorcidas

Del pódcast Mutación matemática 170

Si lees muchas novelas como yo, quizá hayas notado que su calidad varía bastante. Lo sé, es impactante, pero hay libros mediocres que logran publicarse. Y esto ya ocurría antes de la era de los ebooks y los pódcast, cuando cualquier friki con computadora podía autopublicar en línea. (Será mejor que no me extienda demasiado en ese comentario). En fin, centrándonos en las novelas: ¿qué hace que una sea más interesante que otra? ¿Por qué Kurt Vonnegut resulta superior a un romance de quiosco? No te sorprenderá saber que ha habido intentos de analizar la estructura matemática de las novelas para explicar qué las hace buenas. En particular, el matemático y autor ciberpunk Rudy Rucker, en su excelente ebook de ensayos recopilados, intenta explicar la calidad de una obra de ficción en términos matemáticos.

Un concepto útil aquí es el de complejidad de Kolmogorov, aplicado al esquema argumental de un libro. Esta medida, propuesta por el matemático ruso Andréi Kolmogorov en 1963, esencialmente dice que puedes medir la complejidad de una cadena observando el conjunto más corto de instrucciones —o programa— capaz de generarla. Por ejemplo, una cadena como "abababab..." repetida cien veces puede producirse con la instrucción simple "Repite 100 veces: imprime 'ab'". En cambio, los primeros 200 caracteres de este capítulo difícilmente podrían generarse con un programa mucho más breve que uno que diga "imprime esto" y liste los caracteres uno por uno; por tanto, su complejidad es mayor que la de la repetición de "ab".

Aplicado a novelas, el concepto es un poco más abstracto, pero piensa en el esquema de una típica novela rosa barata: "chico conoce chica, chico pierde chica, chico recupera chica", o alguna variante breve. Estas novelas tienen una complejidad bajísima. En cambio, Matadero Cinco, el clásico de Vonnegut, resulta mucho más difícil de encajar en una fórmula. Algo como "chico conoce chica, chico se desancla en el tiempo, chico sobrevive al bombardeo de Dresde, chico es capturado por alienígenas de Tralfamadore" no parece un resumen adecuado:

queda aún demasiado por contar. A primera vista, pues, medir la complejidad de Kolmogorov del argumento sí aporta cierta idea sobre la calidad de una obra de ficción.

Pero en un posfacio al ensayo donde primero propuso esta medida, Rucker menciona una carta de un lector que señala un fallo grave: si aceptamos esta métrica, ¿no sería la guía telefónica de Nueva York la mayor novela en lengua inglesa? ¡Ups! En efecto, la complejidad de una guía, con su interminable lista de nombres y números esencialmente irreductibles, es astronómica. Y creo que la mayoría estaríamos de acuerdo en que leer la guía telefónica no es precisamente un pasatiempo apasionante. Así que necesitamos una métrica mejor.

Para resolverlo, Rucker refina el concepto añadiendo un criterio de "retorcimiento" del cálculo necesario para producir un argumento. Sí, el argot surfero suena un poco ridículo, pero hay que perdonarle los años vividos en California. Lo que él llama un "cálculo retorcido" es aquel que, aunque se describa con un conjunto relativamente breve de reglas, genera patrones de gran complejidad imposibles de prever sin ejecutarlo. Un ejemplo es el famoso "Juego de la Vida" de John Conway (un juego matemático, no el de mesa). Este se juega en una cuadrícula infinita de casillas, donde cada casilla puede estar viva (negra) o muerta (blanca). En cada turno, toda casilla viva con exactamente 2 o 3 vecinas vivas sigue viva; de lo contrario muere por soledad o hacinamiento. Y nace una casilla viva en cualquier posición con exactamente 3 vecinas vivas. Con estas reglas sencillas, repetidas cientos de rondas, aparecen comportamientos asombrosos: estructuras de larga duración a partir de unas pocas casillas iniciales, "cañones planeadores" que se reproducen sin cesar, o incluso un computador universal. Es prácticamente imposible predecir qué ocurrirá tras cientos de rondas, salvo ejecutando el juego. Por ello, según Rucker, el Juego de la Vida es muy retorcido.

La retorsión parece una medida más adecuada de lo interesante que puede ser una novela. Nos ayuda a descartar patrones demasiado previsibles y también a descartar la arbitrariedad pura. Un cálculo retorcido tiene un patrón profundo y estructurado, pero necesitas vivir su desarrollo para comprenderlo. Incluso si conoces el algoritmo de origen, o las ideas iniciales del escritor, debes leer el libro para captar el

efecto completo. Si el esquema argumental es tan simple que, una vez visto, ya no necesitas leer la novela, entonces su retorcimineto es bajo y probablemente no valga la pena. Y si la novela es compleja pero carece de patrón, acaba pareciendo absurda.

Volviendo a Matadero Cinco: creo que podemos clasificarla claramente como retorcida. El protagonista atraviesa una mezcla de vivencias realistas y fantásticas —sobrevive al bombardeo de Dresde, se casa e intenta llevar una vida normal, se desancla en el tiempo, es capturado por alienígenas—. No encaja en fórmulas literarias conocidas, y quienes la han leído saben que mi breve resumen apenas roza la superficie. Y sin embargo, al terminar el libro, todo parece encajar en un conjunto coherente, una novela clásica que explora la locura de la guerra y el concepto del libre albedrío. La yuxtaposición de elementos es chocante, pero al final cobra sentido.

Claro que hay mucho más en juzgar una gran novela que las matemáticas. Seguro que puedes pensar en algún contraejemplo: una novela con alto retorcimiento que aun así apesta. Y esta definición sigue siendo flexible, ya que un argumento no es un objeto matemático preciso como lo es el Juego de la Vida. Además, puede haber desacuerdos honestos sobre el nivel de retorcimiento de una novela. Irónicamente, habiendo leído muchas de las novelas ciberpunk de Rucker, creo que él mismo a veces se desliza de lo retorcido hacia lo casi aleatorio. Aun así, si alguna vez decides escribir una obra propia, esta es una buena guía a tener en cuenta: si quieres mantener el interés de los lectores, lo ideal es conservar un patrón subyacente discernible, pero hacerlo lo más retorcido posible.

CAPÍTULO 9

Reflexiones políticas

Las decisiones sobre cómo debe organizarse y gobernarse la sociedad humana se cuentan entre las elecciones más críticas que una civilización debe afrontar. Por ello, es natural que intentemos valernos de la matemática —que permite un razonamiento preciso basado en premisas bien establecidas— para mejorar nuestras decisiones en este terreno. Sin embargo, esto resulta más fácil de decir que de hacer, pues cualquier decisión política está fuertemente influida por juicios de valor que exceden el ámbito de la matemática, aunque una u otra parte se aferre dogmáticamente a ellos sin importar la evidencia o los acontecimientos externos.

En Mutación matemática he procurado evitar temas que impliquen una postura política fuerte sobre cuestiones controvertidas, para no alienar a parte de los oyentes en el clima polarizado actual. Pero, en lo personal, sí me he aventurado en la política local, logrando ser elegido miembro del consejo de administración del cuarto distrito escolar más grande de Oregón, de modo que los asuntos políticos nunca están del todo lejos de mi mente. Por ello, en numerosas ocasiones, Mutación matemática ha incluido temas que rozan la política de una u otra forma. Espero que disfrutes las anécdotas históricas, y quizá coincidas con algunas de las ideas de este capítulo. Aún creo que mi propuesta para resolver el problema de los recuentos interminables —que leerás en una de las secciones siguientes— sería una gran bendición para el sistema electoral estadounidense.

Un teorema fundacional

Del pódcast Mutación matemática 183

Si eres estadounidense, probablemente limpias tu parrilla y despliegas tu bandera cada 4 de julio. Ese es el día reservado para celebrar la independencia de Estados Unidos de Inglaterra y reflexionar

sobre los teoremas matemáticos que condujeron a la fundación de nuestra nación. ¿Cómo? ¿Creías que el 4 de julio no tenía nada que ver con la matemática? Claramente falta algo en los especiales televisivos que has visto. En realidad, hubo al menos un resultado matemático que influyó directamente en los Padres Fundadores: el teorema del jurado de Condorcet. Este afirma que, si se decide un tema mediante votación y el votante promedio tiene al menos un 50% de probabilidades de acertar, aumentar el número de votantes produce un resultado más preciso.

A finales del siglo XVIII, por la época de la independencia estadounidense, vivía un pintoresco matemático francés, el marqués de Condorcet, que dedicaba mucho tiempo a pensar en los aspectos matemáticos de la democracia, el voto y la teoría de la probabilidad. Condorcet colaboró con colegas en EE.UU. y trabajó personalmente con Benjamin Franklin, de modo que muchos consideran que su teorema influyó de manera directa en la Constitución de 1787. El Teorema del jurado formaba parte de su obra de 1785, Ensayo sobre la aplicación del análisis a la probabilidad de decisiones por mayoría, considerada una contribución fundamental al desarrollo de la teoría de probabilidades. Condorcet se interesaba tanto por los conceptos básicos de la probabilidad como por su aplicación práctica en la formulación de políticas racionales: fue uno de los primeros matemáticos en intentar una aplicación directa a las ciencias sociales.

Para comprender cómo demostrar que aumentar el número de votantes mejora la exactitud del resultado, piensa en un escenario con un número impar n de votos, donde la probabilidad de que un voto individual sea correcto es p, y añadimos dos votos más que podrían cambiar la decisión. El voto número n puede considerarse decisivo: nuestra suposición de imparidad impide empates, y, de otro modo, los dos votos añadidos no habrían podido invertir el resultado. Así, solo necesitamos calcular las probabilidades de los tres últimos votos en dos casos: que conviertan una mayoría incorrecta en correcta, o que transformen una mayoría correcta en incorrecta. Recuerda que cada voto tiene probabilidad p de ser correcto y 1−p de ser erróneo. También recuerda que la probabilidad conjunta de eventos independientes se obtiene multiplicando sus probabilidades. Para que el voto decisivo

previo fuera incorrecto y los dos nuevos revirtieran el resultado, la probabilidad sería $(1-p) \times p^2$. Para que el voto previo fuera correcto y los dos nuevos lo invirtieran, la probabilidad sería $p \times (1-p)^2$. El primero de estos valores es mayor que el segundo si, y solo si, $p > 0{,}5$.

No obstante, debemos atender a las limitaciones de este teorema antes de confiar demasiado en él. Su base es la noción de una "corrección objetiva", la existencia de una respuesta correcta que la mayoría alcanzará con cierta probabilidad. Salvo cuando yo mismo soy candidato, rara vez existen respuestas tan claras en política. El teorema también presupone independencia entre los votantes, e ignora la influencia de los vecinos, las ilusiones colectivas, la apatía de quienes no buscan la información necesaria para decidir con inteligencia o la manipulación de los demagogos. Estoy seguro de que, según tu tendencia política, atribuirás la elección de uno o más de los dos últimos presidentes de EE.UU. a tales factores. Y el teorema solo funciona cuando se elige entre exactamente dos opciones: no contempla escenarios con múltiples candidatos.

Esta última limitación conduce a otra de las ideas clave de Condorcet: su "paradoja del voto". Supongamos tres candidatos, A, B y C, y un electorado dividido en tres grupos con preferencias cíclicas: unos prefieren A sobre B sobre C, otros B sobre C sobre A, y otros C sobre A sobre B. Si votan, resulta prácticamente un triple empate, con C ligeramente por encima del tercio necesario. Pero se podría argumentar que, si gana C, entonces 2/3 de los votantes habrían preferido a B sobre C: los que preferían A también colocaban a B por delante de C, y lo mismo los que preferían B. Pero si gana B, se puede hacer la misma objeción con los partidarios de A; y si gana A, ocurre lo propio con los de C. Así, cualquier resultado de la votación terminará siendo rechazado por 2/3. Esto puede resolverse con un "método de Condorcet", un sistema más complejo que garantiza que el ganador sea aquel que vencería en una competencia par a par contra cualquier otro. Para ello, los votantes deben ordenar a los candidatos en preferencias en lugar de escoger solo uno, o se realizan múltiples rondas con segunda vuelta. Personalmente, creo que estos métodos alternativos tienen mucho sentido, aunque son más complicados de administrar y comprender.

Con todas estas ideas sobre cómo debería funcionar un gobierno, se pensaría que Condorcet tuvo una brillante carrera política, ¿no? Lamentablemente, sufrió la misma suerte conocida desde Sócrates por quienes abrazan con demasiado entusiasmo sus ideas filosóficas sin entender la psicología defectuosa que los rodea. Inicialmente apoyó y participó activamente en la Revolución Francesa de 1789, pero se negó a respaldar a la facción radical que tomó el poder, intentando en cambio convencerla de adoptar sus planteamientos. Eso le permitió ocupar un puesto en la Asamblea durante un tiempo y gozar de cierto apoyo popular, pero acabó conduciendo a su arresto y muerte. Técnicamente se suicidó en prisión, aunque muchos creen que se lo permitió —o se lo organizó— para evitar la vergüenza de ejecutar públicamente a un revolucionario tan conocido. Sea como fuere, en el experimento de matemática aplicada más importante de su vida, las premisas básicas de sus teoremas no se cumplieron. Esperemos que mi periodo en la Junta Escolar de Hillsboro tenga un desenlace más afortunado.

Más que un gato de caricatura

Del pódcast Mutación matemática 88

Si prestaste atención en las clases de historia del instituto, quizá recuerdes vagamente el nombre de James Garfield, vigésimo presidente de Estados Unidos. En su juventud había mostrado inclinaciones académicas, pero la Guerra Civil interrumpió sus planes. Resultó ser un soldado talentoso y ascendió rápidamente en el ejército. Más tarde, como veterano popular, fue elegido al Congreso y después a la presidencia en 1880, el único presidente en la historia elegido mientras aún ocupaba un escaño en la Cámara de Representantes. Trágicamente, fue asesinado cuatro meses después de asumir el cargo, así que no tuvo mucho tiempo de hacerse notar en los libros de historia. Pero se le recuerda por un logro muy peculiar: es el único presidente estadounidense que publicó un artículo académico en matemáticas. Se le atribuye una prueba original del teorema de Pitágoras, elaborada mientras estaba en la Cámara de Representantes.

Como recordarás, el teorema de Pitágoras afirma que, en un triángulo rectángulo con catetos de longitudes A y B e hipotenusa de longitud C, se cumple $A^2 + B^2 = C^2$. La prueba de Garfield consistía en construir un trapecio particular. Coloca dos copias del triángulo rectángulo una al lado de la otra en línea recta, tocándose en las puntas, de modo que el cateto de longitud A de uno quede junto al cateto de longitud B del otro. Ahora une los vértices superiores de ambos triángulos. Obtendrás un trapecio cuya base mide A + B, con altura B en un lado y A en el otro. Si dibujas esta figura, verás que el trapecio se compone de tres triángulos: los dos iniciales, más uno en el medio formado al unir las cimas, que resulta ser un triángulo rectángulo con ambos catetos de longitud C.

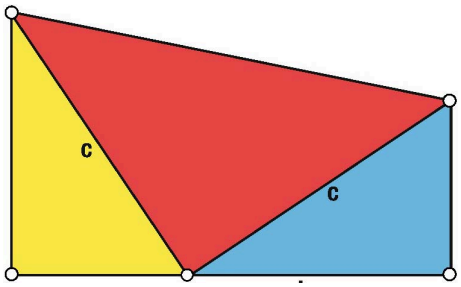


Figura 9-1. Trapezoide de Garfield.

Ahora calculemos las áreas de los tres triángulos. Los dos originales, con catetos A y B, tienen cada uno un área de AB/2. El triángulo central tiene un área de $C^2/2$. Pero también podemos calcular el área del trapecio completo, que es la base por el promedio de los lados, o (A + B) × (A + B)/2. Si igualamos ambas expresiones obtenemos: AB/2 + AB/2 + $C^2/2$ = (A + B) $^2/2$. Simplificando: A^2 + 2AB + B^2 = 2AB + C^2. Eliminando 2AB en ambos lados, llegamos al teorema.

Cabe señalar que no se trata de un resultado revolucionario. Una de las demostraciones clásicas consiste en construir un cuadrado grande con cuatro copias del triángulo original, y la prueba de Garfield no es más que la mitad de esa construcción, sustituyendo áreas basadas en trapecios por áreas basadas en cuadrados. Aun así, me parece alentador que al menos un presidente estadounidense haya hecho una contribución real a la matemática. Con lo que está ocurriendo con el presupuesto federal, quizá sea dudoso que los más recientes sepan siquiera sumar.

El camino circular hacia la condena

Del pódcast Math Mutation 20

Todo escolar, y probablemente la mayoría de los oyentes de este pódcast, conoce la constante llamada π. Es la razón entre la circunferencia y el diámetro de un círculo, un decimal infinito que comienza con 3,14159. Quienes sean religiosos de tradición judeocristiana tal vez se inquieten al oír que, en el Libro de los Reyes de la Biblia, se dice que un estanque redondo tenía un diámetro de 10 codos y una circunferencia de 30 codos, lo cual implica un valor de π igual a 3. ¿Significa esto que hay que elegir entre la fe y la matemática?

Por fortuna, existen varias formas de reconciliar este relato bíblico con la realidad. La más simple es decir que se trata de una aproximación: al fin y al cabo, la Biblia fue escrita muchos siglos antes de la invención del sistema decimal, lo que hacía engorrosas las descripciones numéricas detalladas. Hacia el año 150 d.C., un famoso rabino llamado Nehemías ofreció una explicación más ingeniosa: el diámetro se medía por el borde exterior, mientras que la circunferencia se medía por el borde interior. De ese modo, dependiendo del grosor del recipiente, los valores podían ajustarse con cualquier grado de precisión deseado.

Otro elemento curioso de esta confusión son las persistentes historias que circulan por la red sobre fundamentalistas cristianos del Medio Oeste estadounidense que habrían intentado aprobar leyes declarando que π es igual a 3. Estos rumores existían mucho antes de Internet: Robert Heinlein los menciona de pasada en una de sus novelas. Siempre me sonaron dudosos: no solo los babilonios ya conocían π con un margen de error inferior al 0,5%, sino que basta un plato y un trozo de hilo para refutar la teoría de π = 3, incluso siendo un granjero analfabeto en pleno campo.

El consenso de los sitios dedicados a leyendas urbanas parece ser que tal rumor es falso, y que ningún grupo cristiano intentó imponer legalmente ese valor. La pizca de verdad que dio origen a estas historias proviene de un proyecto de ley presentado en 1897 en la legislatura de

Indiana para cambiar el valor de π. La propuesta, impulsada por un pseudo-matemático bastante extraviado llamado E. J. Goodwin, afirmaba que 3,14159 era "enteramente insuficiente y engañoso en aplicaciones prácticas". Al parecer, el texto estaba tan incoherentemente redactado que ni siquiera era consistente consigo mismo, proponiendo en distintos pasajes valores de π como 3,2, 3,23 o incluso 4. El proyecto llegó a aprobarse en la Cámara estatal, pero quedó indefinidamente detenido en el Senado por motivos poco claros y nunca se convirtió en ley.

¿La lección? Bueno, tal vez los habitantes de Indiana estén un poco locos, pero no por ser cristianos. Y tú puedes seguir midiendo correctamente el área y la circunferencia de los círculos sin temor a condenarte por ello en la otra vida.

Un profesor de matemáticas para recordar

Del pódcast Math Mutation 93

Un día, sin ideas para el pódcast, me puse a revisar esas listas en línea de personas fallecidas recientemente, por si encontraba a alguien de relevancia matemática que mencionar. Un nombre me llamó la atención: Aleksandr Solzhenitsyn, el disidente soviético que jugó un papel crucial en dar a conocer al mundo los horrores del sistema comunista. Lo que muchos ignoran es que se había formado originalmente en matemáticas, y ese trasfondo resultó decisivo para su trayectoria política posterior.

Solzhenitsyn nació en 1918, alcanzando la mayoría de edad justo a tiempo para la Segunda Guerra Mundial. Aunque desde joven tuvo interés por la literatura, descubrió en la escuela que poseía un talento natural para la matemática, por lo que estudió en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Rostov, donde se graduó en 1941. Gracias a esa preparación fue enviado a una escuela de artillería, sirviendo como oficial artillero hasta que fue arrestado por criticar a Stalin en una carta privada.

Tras su detención, Solzhenitsyn fue deportado al Gulag, la red soviética de campos de concentración donde los presos políticos eran sometidos a trabajos forzados, con apenas alimento o refugio, hasta morir exhaustos. Pero su formación matemática le salvó: fue uno de los pocos elegidos para ingresar en las sharashkas, una especie de centros universitarios dentro del sistema de campos. Allí los prisioneros recibían mejor alimentación y alojamiento, a cambio de realizar investigaciones científicas avanzadas.

En su novela autobiográfica El primer círculo, Solzhenitsyn relata la vida en estos lugares. Incluye anécdotas con un humor sombrío sobre los intentos de los presos de engañar a sus amos comunistas analfabetos en cuestiones técnicas. En un caso, lograron convencer a altos funcionarios de que podían descifrar lo que se decía en una huella de voz, coludiendo previamente sobre qué frases usar en la prueba. Pero el trasfondo era mortalmente serio: a cualquier prisionero en

quien las autoridades perdieran la fe lo devolvían al campo de trabajos forzados comunes.

Eventualmente, Solzhenitsyn fue declarado “rehabilitado” y liberado, y nuevamente su formación matemática fue decisiva. Un ex preso rehabilitado seguía viviendo bajo muchas restricciones, con pocas opciones sobre dónde y cómo residir. Pero al poder ejercer como profesor de matemáticas, tuvo una existencia relativamente cómoda para alguien en su situación, y el tiempo suficiente para escribir. Fue así como presentó Un día en la vida de Iván Denisovich en el momento justo: Kruschev, nuevo líder soviético, buscaba distanciarse del legado de Stalin y permitió su publicación, pese a su dura exposición de los tratos inhumanos en los campos. El Kremlin acabaría lamentando esa decisión, sobre todo después de que Solzhenitsyn recibiera el Nobel y se volviera demasiado famoso para ser eliminado en silencio, como tantos otros críticos del sistema.

Dado que este es un pódcast de matemáticas y no de política, no entraré en detalle sobre el resto de su obra, que denunció no solo el trato a los prisioneros políticos, sino también las múltiples formas en que el comunismo destrozaba el tejido moral, político y cultural de Rusia. Si te interesa el tema, recomiendo encarecidamente El archipiélago Gulag, su monumental obra basada en los testimonios propios y de miles de ex prisioneros que le escribieron tras hacerse célebre. Podrías pensar que 1800 páginas sobre la vida en campos soviéticos serían áridas, pero una vez que empecé a leerlo, no pude dejarlo.

Soluciones electorales

Del pódcast Math Mutation 172

Las elecciones reñidas, en las que dos candidatos obtienen totales de votos tan cercanos que entran en el margen de error del recuento, parecen ser una característica perenne de nuestros sistemas de votación. Casi todas las elecciones estadounidenses recientes van acompañadas de noticias sobre equipos de abogados listos para disputar resultados y forzar recuentos en diversos estados o condados. Seguro recuerdas casos como la elección presidencial Bush/Gore del 2000, el senatorial Coleman/Franken en Minnesota en 2008, o la tensión descomunal de la elección para la junta escolar de Hillsboro, Oregón, en 2009: Seligman contra Sollman. Pero, ¿tienen realmente sentido lógico tanto dramatismo, batallas legales y recuentos tras unas elecciones cerradas? ¿Mejoran la calidad de los resultados? Recientemente estuve leyendo el entretenido, aunque a veces defectuoso, libro de Charles Seife publicado en 2010, Proofiness: How You're Being Fooled by the Numbers (Evidencia: cómo te engañan con los números). Allí presenta un análisis matemático muy interesante de estas situaciones.

Seife describe el problema central como lo que llama "desestimación". ¿Qué significa? He aquí un ejemplo particularmente absurdo: un guía de museo mostraba a los visitantes el esqueleto de un gran dinosaurio. Uno de ellos preguntó qué edad tenía. El guía respondió: "Exactamente 65 millones y 38 años". Al preguntarle por qué tanta precisión, contestó: "Llevo 38 años trabajando aquí, y entonces el paleontólogo me dijo que este fósil tenía 65 millones de años". Como se ve, el guía confundía ridículamente la exactitud con la estimación: lo que debía ser un cálculo aproximado de varios millones de años lo interpretaba como un valor exacto. "Desestimación" es la tendencia a tratar un valor estimado como mucho más exacto de lo que en verdad es.

De forma análoga, cuando recibimos los totales de una elección, no son un conteo exacto, sino una estimación. Así, en lugar de afirmar que

en Florida, en el año 2000, los resultados fueron “Bush 2.912.790 / Gore 2.912.253”, lo correcto habría sido decir que cada uno obtuvo aproximadamente 2.910.000 votos. Los totales nominales son una estimación, igual que la edad del dinosaurio. Al principio puede sonar extraño: ¿acaso los votos no son cantidades exactas que pueden contarse con certeza? En realidad, al manejar grandes números de objetos, está demostrado que los humanos cometen errores ocasionales. Entre gerentes de fábricas es una verdad establecida que, si se pide a dos empleados que hagan inventario de un almacén, darán resultados distintos. En las notas del programa encontrarás un enlace a un estudio de la Universidad Rice sobre recuento manual de votos, que muestra un error esperado de entre 1 y 2%. Y aunque se utilicen computadoras, siempre hay riesgos: atascos de papel, cortes eléctricos, errores de tipeo o fallas de software. Con esos márgenes de error, un recuento no es más que un lanzamiento de moneda: dará un resultado distinto, pero con la misma probabilidad de error que el original.

Entonces, ¿qué hacer en una elección cerrada? Seife propone una solución sencilla: en lugar de perder tiempo y dinero en recuentos para obtener un resultado esencialmente aleatorio, convengamos en que, si la diferencia está dentro de un cierto margen, se declare un empate y se decida al ganador lanzando una moneda. El resultado no sería menos preciso que el logrado tras recuentos, y mucho más rápido y barato. Es una solución simple y elegante… pero Seife pasa por alto un fallo fatal. ¿Cuál es el margen exacto para declarar el empate? ¿Y qué ocurre si los resultados están justo en el límite de ese margen? En el caso de Florida en 2000, supongamos que se hubiese fijado que 50,005% constituía la victoria directa, dejando a Bush 12 votos por debajo del umbral que lo libraba del sorteo. Eso habría generado el mismo drama de siempre, forzando recuentos para empujar el resultado a uno u otro lado del límite.

He aquí la clave que Seife no consideró: el problema existe siempre que un límite discreto hace que un solo voto (o un puñado) marque una diferencia descomunal en el resultado. ¿Hay solución? Veo un método posible: una meta-solución basada en la idea inicial. Si el margen está cerca del umbral que activa el lanzamiento de moneda, añadimos una primera moneda para decidir si efectivamente el resultado entra en la

categoría de empate. Si sale que sí, entonces lanzamos la segunda moneda para decidir al ganador. Eso le daría al candidato con menos votos una probabilidad de 1 en 4 de voltear el resultado. Pero, ¿qué pasa si estamos justo en el margen de ese margen? Entonces recurrimos a tres lanzamientos, y así sucesivamente.

Lo curioso es que al tratarse de porcentajes de porcentajes, el conjunto de márgenes forma una serie geométrica: $1/n + 1/n^2 + 1/n^3 \ldots$, lo que significa que la suma converge a un valor límite, más allá del cual ya no haría falta lanzar monedas. Por ejemplo, si aceptamos que un margen del 10% activa el primer lanzamiento, la serie $1/10 + 1/100 + 1/1000 \ldots$ converge a 1/9 del total de votos: ese sería el límite exterior donde ocurrirían los lanzamientos. ¿Reaparecería el problema en la frontera discreta de un voto? Sí, agravado por el hecho de que no existen fracciones de voto, lo que hace que la serie se agote tras 7 u 8 iteraciones, cuando la diferencia es menor que un voto. El candidato perdedor intentaría por todos los medios cruzar ese umbral, recreando todo el drama legal.

Tal vez sería mejor aplicar una escala continua de probabilidad basada en una curva de campana: si un lado obtiene el 99% de los votos, existe una probabilidad ínfima de revertir el resultado, y esta se va ajustando gradualmente hasta llegar a un 50% exacto en el empate, sin saltos abruptos causados por un solo voto. Para cualquier total habría una probabilidad conocida de invertir el resultado, y pequeñas variaciones solo implicarían ajustes menores en esa probabilidad.

Un sistema así ahorraría enormes recursos sociales hoy desperdiciados en recuentos interminables. Piensa en lo que eso significa, en tiempos de crisis presupuestarias: ¿cuántos puestos docentes podrían salvarse si los honorarios de todos los abogados de recuento de Obama y Romney se donaran a las escuelas? Me encantaría llamar al presidente Obama y sugerírselo. Claro que el sistema no sobreviviría a la primera derrota injusta: cuando un candidato popular obtuviera un claro total mayor, pero perdiera por una serie improbable de lanzamientos de moneda, habría disturbios en las calles y presión popular para volver al sistema actual. En fin… supongo que por eso soy pódcaster y no presidente.

La democracia no funciona

Del pódcast Math Mutation 188

Tras los trabajos de Condorcet mencionados unas secciones atrás, el análisis matemático de los sistemas electorales continuó hasta nuestros días. Uno de los resultados más famosos del siglo pasado en este campo es el teorema de Arrow. Kenneth Arrow lo demostró por primera vez en 1951, como parte de su doctorado, el inicio de una larga carrera que acabaría por otorgarle un premio Nobel. Este teorema sostiene, en esencia, que según ciertos criterios comunes que deberían definir un sistema de votación justo, ningún sistema de votación por orden de preferencias puede cumplirlos todos. Puede verse, en cierto modo, como una extensión de la paradoja de Condorcet. Y creo que la forma más sencilla de introducirlo es mediante una anécdota que leí en el blog Cafe Hayek de Don Boudreaux.

"Entras en una heladería y preguntas qué sabores tienen hoy. El dependiente responde: 'Tenemos vainilla y frutilla'. Lo piensas un momento y dices: 'Quiero frutilla'. Justo antes de que el empleado empiece a servirla, agrega: 'Ah, me olvidaba. También tenemos pistacho'. Entonces reflexionas un segundo y replicas: 'En ese caso, dame vainilla'."

Parece absurdo, ¿verdad? De algún modo, la disponibilidad de un sabor que no te gusta cambia tu primera elección. Sin embargo, en materia de votación nuestra sociedad funciona exactamente así. En una elección reciente, se señaló el caso de la gobernación de Virginia: muchos creen que el republicano Cuccinelli perdió frente al demócrata McAuliffe por la presencia del candidato libertario Robert Sarvis, considerado "aguafiestas". Ganó McAuliffe, pero si Sarvis no se hubiera presentado y sus votantes hubieran optado por Cuccinelli (cuyas posturas eran muy similares a las de Sarvis en la mayoría de los temas), entonces Cuccinelli habría resultado vencedor. Aunque no estés de acuerdo en este caso concreto, lo cierto es que cada temporada electoral en EE.UU. aparecen artículos sobre este "efecto aguafiestas".

Ese efecto está relacionado con uno de los criterios de justicia en el

teorema de Arrow: la independencia de alternativas irrelevantes —la idea de que, si prefieres X sobre Y, la existencia de una tercera opción Z no debería cambiar esa preferencia. Los otros tres criterios son:
No dictadura: ningún votante debe tener el poder de decidir por todos.
Universalidad: para cualquier conjunto de votos, el sistema debe proporcionar un ranking completo y determinista de las preferencias sociales.
Unanimidad: si todos prefieren una opción sobre otra, la sociedad también debe reflejar esa preferencia.

El teorema establece que, si hay al menos dos votantes y tres alternativas, jamás será posible cumplir simultáneamente con esos cuatro criterios de equidad.

Como era de esperar, esto ha generado infinitas discusiones sobre cómo mejorar los sistemas democráticos. Una forma sencilla es hacer trampa: relajar uno de los criterios. De hecho, en la práctica ya ocurre, pues muchos países —incluido EE.UU.— utilizan sistemas que permiten el efecto aguafiestas, violando la independencia de alternativas irrelevantes. Otra posibilidad es limitar siempre la elección a solo dos alternativas: así se logra un sistema "justo" bajo los criterios de Arrow. Pero si intentamos dividir un conjunto mayor en pares y decidir mediante sucesivas votaciones binarias, descubrimos que el proceso se convierte en un torneo sujeto a los mismos problemas: el orden en que se organizan los pares puede influir en el ganador final. También existen sistemas no basados en orden de preferencia, como la Votación por rangos, en el que cada candidato recibe una puntuación y se suman los totales. Este método tiene sus propios inconvenientes: a veces refleja bien un juicio promedio de la sociedad, pero contradice lo que sería la verdadera opción mayoritaria.

Algunos matemáticos han señalado que, si se elimina la condición de que haya un número finito de votantes, el teorema puede resolverse. Pero dudo que aumentar la tasa de natalidad hasta el infinito sea una solución práctica para arreglar nuestro sistema electoral. Además, hasta que esos votantes alcanzaran la mayoría de edad, no habría manera justa de elegir un consejo escolar que administrara la educación de la infinita prole…

Todos estos sistemas "mejorados", o al menos los viables en la vida

real, tienen la desventaja de hacer más complicada la votación. Y considerando lo difícil que resulta ya contar votos simples con exactitud, probablemente eso sea un defecto fatal. En el fondo, debemos aceptar que todo sistema de gobierno tiene fallos inherentes, y aprender a sobrellevar que la vida nunca es 100% justa. Que, tras cada elección, los partidarios del bando perdedor declaren al sistema socialmente roto es apenas uno de los precios que pagamos porque el pueblo tenga alguna influencia en su gobierno. Cada arreglo que se proponga traerá consigo un nuevo tipo de injusticia.

En lo personal, sigo pensando que el mejor sistema sería el que propuse en la sección anterior: reconocer en cierto punto que todo recuento es incierto, y usar un dado para decidir el resultado final de manera probabilística, según los votos ya contados. Al menos, sería una buena solución temporal… hasta que la sociedad tenga la sensatez de nombrarme su benévolo rey-filósofo.

Suelta ese número o disparamos

Del pódcast Math Mutation 60

¿Te sorprendería saber que existen situaciones en las que escribir un teorema matemático, o incluso un número específico, puede ser ilegal? Esta extraña situación surge de la interacción entre los derechos de autor, los secretos comerciales y la legislación estadounidense. Según la Digital Millennium Copyright Act (DMCA), aprobada en 1998, prácticamente cualquier intento de sortear la protección de obras con copyright —incluyendo la investigación de métodos de encriptación— es ilegal. Muchos investigadores lo consideraron inaceptable, pues el estudio del cifrado es un área esencial de la matemática moderna. Dependiendo de la interpretación, buena parte de esa investigación podría verse como actividad criminal. El caso más célebre fue el de la publicación del algoritmo DeCSS, utilizado para codificar los archivos de video en DVD.

David Touretsky, profesor de ciencias de la computación en Carnegie Mellon, defendió con fuerza que el algoritmo DeCSS pertenece al ámbito de las matemáticas y de la libertad de expresión, y que en sí mismo no debería considerarse ilegal. Para respaldar su postura, creó una galería hilarante de formas alternativas de expresar el algoritmo. He aquí algunas:

- El ejemplo más básico: el programa informático original que descifra directamente los DVD, obviamente el caso más dudoso legalmente.
- Un programa escrito en un lenguaje funcional. Estos lenguajes, en esencia, permiten que un programa sea también una formulación matemática. ¿Podría seguir siendo ilegal?
- Un teorema matemático que demuestra que los DVD pueden descifrarse. El algoritmo se describe dentro de la demostración, sin proporcionar código ejecutable. ¿Podría eso ser ilegal?
- Una poesía haiku que enuncia las propiedades esenciales del algoritmo, siguiendo la métrica tradicional japonesa. También incluyó una lectura dramática en audio, con variantes

musicales y hasta de danza cuadrada. ¿Podrían arrestarte por bailar al ritmo de un teorema ilegal?
- Una secuencia de ADN artificial que codifica el algoritmo. Con los avances actuales, quizá podríamos crear una bacteria ilegal.
- Un tablero del juego Buscaminas en el que la disposición de las minas representa el algoritmo DeCSS. Supongo que, mientras explotes antes de descubrir todas las minas, no estarás violando la ley.
- Una codificación del algoritmo como un número primo único. ¿Sería este el primer caso en la historia de un número ilegal? ¿Podrían encarcelarte por "posesión numérica"?

Puedes ver la galería completa en el sitio de Touretsky. Es divertido repasar ejemplos así, aunque creo que pasaba por alto un tema serio. No soy abogado, pero si llevamos su argumento al extremo, habría que desechar los conceptos de copyright, marca y patente: con los métodos digitales modernos, todo archivo es en realidad una cadena de unos y ceros, que puede interpretarse como un número muy grande. Y gran parte de nuestra tecnología se sostiene en que los creadores reciben algún tipo de protección legal. ¿Estamos dispuestos a renunciar a todo eso solo para recuperar la coherencia matemática absoluta?

Al final, Touretsky no convenció al juez y la DMCA siguió vigente. Así que quizá sí tengamos que aceptar que, de tanto en tanto, las matemáticas pueden ser ilegales. Pero no te preocupes: si alguna vez acabo en la cárcel, prometo encontrar la manera de seguir publicando este pódcast.

Así lo hacemos en el gobierno

Del pódcast Math Mutation 158

En una reunión del comité curricular del distrito escolar de Hillsboro, Oregón, mientras se discutían avances en la educación de alumnos de inglés como segunda lengua, un funcionario presentó una estadística que se veía más o menos así:

Puntaje promedio en el examen: 73%

Margen de error: 9%

Puntaje "ajustado": 82%

Para cualquiera de nosotros que trabaje en ingeniería u otras profesiones donde se usan márgenes de error, esto resultaba bastante raro. Un "margen de error" representa la imprecisión de una medición, e inherentemente puede indicar incertidumbre en ambas direcciones, con cierto nivel de confianza. Así, un puntaje de 73% con un margen de error de 9% significa que tenemos un 95% de confianza en que el valor real se encuentra entre 64% y 82%. Es igualmente probable que el resultado verdadero esté en el extremo inferior como en el superior. ¿Qué sentido tiene sumar el margen de error al promedio y reportar el valor máximo del intervalo como el "resultado ajustado"? La respuesta, cuando hice la pregunta: "Así lo hacemos en el gobierno."

Un lindo truco: permite presentar toda estadística en la mejor luz posible para promocionar el éxito de los funcionarios en turno. Aunque, en mi opinión, es una locura: ¡otorgan puntos extra por la imprecisión de la medición! Piénsalo: normalmente, mientras menor sea el margen de error, más valiosa es la medición, pues nos da una imagen más clara y precisa. Pero observa lo que pasa aquí: si trabajan duro para mejorar la prueba y reducen el margen de error, ¡el "puntaje ajustado" sale perjudicado! Y si saben que los puntajes reales están bajando, pueden manipular el sistema empeorando la calidad de la prueba o el muestreo, para aumentar el margen de error en lugar de mejorar el conocimiento de los alumnos. ¿Es así como deberían hacerse las mediciones en nuestro sistema educativo?

Entiendo cómo esto puede convertirse en costumbre en el gobierno:

una vez que un funcionario lo hace, todos los demás tienen que seguirlo, o de lo contrario sus estadísticas se verán “peores”. Imagina que el distrito dejara de “ajustar” los puntajes de golpe: “¡Miren, en Hillsboro los resultados bajaron un 9% este año!” Cualquier funcionario electo relacionado sería carne de cañón para sus oponentes políticos, y los empleados que abandonaron el ajuste pagarían las consecuencias.

No tomes esto como una crítica al funcionario en particular que hizo la presentación: de hecho, lo felicito por su franqueza al explicarme el tema. En un régimen donde debe producirse este absurdo “puntaje ajustado”, la política más honesta intelectualmente es hacer lo que él hizo: mostrar los números originales junto al resultado final, y dejar que la audiencia vea la historia completa. Me alegra ver que nuestro distrito lo haga así.

La gran lección: cada vez que un organismo gubernamental reporte una estadística “ajustada”, mírala con lupa y exige ver los datos crudos si no los presentan.

CAPÍTULO 10

Cuestiones de dinero

El dinero y la economía figuran entre las motivaciones más antiguas de la sociedad para aprender y desarrollar las matemáticas. Si lo piensas, el hecho de que podamos sostener políticas inteligentes de negocio e intercambio no es algo que deba darse por sentado. ¿No es un pequeño milagro que una persona pase 40 horas a la semana diseñando computadoras sin tener idea de dónde viene su comida, otra dedique el mismo tiempo a cultivar sin saber nada de lo que ocurre en la fábrica de computadoras, y ambas terminen con fácil acceso a alimentos, tecnología y servicios ajenos como la atención médica? De algún modo, el pegamento de la economía, apoyado en fundamentos matemáticos, hace que todo esto funcione con fluidez en nuestra sociedad moderna. En este capítulo destacaremos algunas anécdotas históricas divertidas y reflexiones modernas sobre conceptos relacionados con el dinero, la economía y los negocios, entrelazados con diversos aspectos matemáticos.

La locura de las muescas

Del pódcast Math Mutation 96

Hoy estamos tan acostumbrados a la alfabetización universal y a la abundancia de materiales de escritura que rara vez pensamos en cómo contaríamos o llevaríamos registros sin escribir. Y sin embargo, hasta hace apenas un par de siglos, este era un problema serio. Mucha gente y muchos negocios mantenían sus cuentas con palos de muescas, trozos de madera con incisiones que representaban cantidades. El uso de estos palos se remonta muy atrás: se dice que el artefacto matemático más antiguo es el "Hueso de Lebombo", una fíbula de babuino de 35.000 años con 29 muescas hallada en Suazilandia, parecida a los palos-calendario que aún usan los bosquimanos. Incluso en Occidente, este método duró más de lo que podrías imaginar. En Inglaterra, por

ejemplo, la transición de los palos a los registros en papel no ocurrió hasta principios del siglo XIX. Hay incluso historias de que los primeros neoyorquinos ubicaron su mercado de valores —hoy Wall Street— cerca de una buena fuente de madera, en caso de necesitarla para hacer palos de muescas.

El sistema de registro con palos de muescas utilizado por el Échiquier,[9] la autoridad fiscal inglesa, se transmitía desde el siglo XII y era bastante ingenioso. Primero se hacían incisiones de distinto grosor para indicar una cantidad: mil libras era un corte del ancho de la palma; veinte libras, el ancho del meñique; y así. Luego se partía el palo en dos a lo largo, y cada parte quedaba en manos de cada participante en la transacción. Dado que con la tecnología premoderna resultaba prácticamente imposible fabricar una réplica exacta con muescas diferentes, era un método casi infalsificable para registrar impuestos o transacciones similares. Las mitades se aceptaban como pruebas legales en tribunales europeos y bajo el código napoleónico. Y una mitad conservada por el Échiquier, que mostraba impuestos aún por pagar al rey, podía venderse antes de la fecha de cobro cuando el gobierno necesitaba efectivo. Así, estas mitades funcionaban como una versión temprana de los bonos a corto plazo, iniciando una tradición de innovación en el sistema monetario británico.

Con el tiempo, claro, las cosas cambiaron. Los funcionarios del tesoro inglés intentaban abandonar este sistema desde 1724. Pero por costumbre y presión social, los palos siguieron vigentes hasta 1826. En 1834, el montón de palos viejos en descomposición guardados en Westminster se volvió tan molesto que buscaron una manera de liberar el espacio. Charles Dickens señaló que podrían haberlos distribuido entre los pobres de Londres como leña. Pero, como suele pasar cuando interviene el gobierno, las normas oficiales dictaban otro procedimiento: debían ser incinerados en una estufa del Parlamento.

Si eso ya parecía tonto, hubo un problema más: había demasiados palos para caber en la estufa. Y los trabajadores encargados de la quema no estaban allí para pensar, sino para obedecer, y según cuentan, estaban apurados por cumplir con el plazo de las cinco de la tarde. Apretujaron todos los que pudieron y encendieron el fuego. Dickens

describe lo que siguió: “La estufa, atiborrada de estos absurdos palos, prendió fuego al revestimiento de madera; el revestimiento prendió fuego a la Cámara de los Comunes; ambas cámaras del Parlamento quedaron reducidas a cenizas; se llamó a arquitectos para construir otras; y ahora estamos en el segundo millón de su costo”. En otras palabras: el Parlamento se quemó hasta los cimientos y hubo que reconstruirlo desde cero.

Cómo arruinar a tu jefe y hacerte rico

Del pódcast Math Mutation 84

Con todo el revuelo económico de los últimos tiempos, volví a hojear mi ejemplar de Fooled by Randomness, el excelente libro de Nassim Nicholas Taleb sobre las falacias de probabilidad que afectan a los inversionistas modernos. Uno de los temas importantes que introduce el libro es el concepto de apuestas asimétricas. No es un concepto matemático complejo, pero aun así sorprende cuántas personas no lo piensan a fondo al invertir.

Supongamos que te digo que la acción de MutaMatemat.com tiene un 90% de probabilidades de subir el próximo año, y solo un 10% de bajar. Por el momento asumamos que tenemos información totalmente precisa, y estás seguro de que estas probabilidades son correctas. Tu instinto podría ser salir corriendo a comprar acciones. Después de todo, tienes un 90% de probabilidades de ganar dinero. ¿Pero es realmente la respuesta correcta? En realidad, necesitas más información para decidir si deberías comprar o vender. Para verlo, supongamos que la acción vale hoy 100 dólares, y analicemos las ganancias esperadas en dos escenarios.

Escenario uno: si la acción sube o baja, será en cincuenta centavos. Si compras una acción, tu ganancia esperada será $0{,}9 \times 50 + 0{,}1 \times (-50)$ centavos, es decir, 40 centavos. Como la ganancia esperada es positiva, conviene comprar: a largo plazo, en promedio, ganarás dinero con esta estrategia.

Escenario dos: el 90% de probabilidad de alza se debe al boca a boca sobre Mutación matemática, así que si sube, lo hará también en cincuenta centavos. Pero el 10% de probabilidad de caída se debe a un rumor: que el presentador se convertirá a la religión amish y abandonará toda tecnología, con lo cual el pódcast será inútil y la acción caerá de los 100 dólares completos, es decir, 10.000 centavos. Tu ganancia esperada será $0{,}9 \times 50 + 0{,}1 \times (-10.000) = -9{,}55$ dólares. A largo plazo, usar esta estrategia repetidamente y decidir comprar la acción te llevará a una pérdida enorme.

Este es un ejemplo de apuesta asimétrica: aunque la probabilidad de ganancia sea mayor, la magnitud de esa ganancia no compensa el riesgo de una pérdida gigantesca. Incluso con un 90% de posibilidades de que la acción suba, ese 10% en que baja basta para arruinarte. Así que parece obvio que un inversor inteligente debería identificar estas apuestas y no invertir cuando hay una gran probabilidad de una ganancia pequeña, pero una pequeña probabilidad de una pérdida catastrófica. ¿Verdad? Bueno, falta un giro más.

Supongamos que manejas una enorme cartera corporativa, de cientos de millones de dólares. Cada año en que la cuenta gana, recibes un bono de medio millón de dólares que puedes guardar en tu cuenta personal. Pero si la empresa quiebra, te despiden. Ahora piensa de nuevo en la apuesta asimétrica. Si hay un 90% de que gane, sabes que puedes arriesgar el dinero de la empresa: nueve de cada diez años recibirás un gran bono. Eventualmente seguramente llevarás a la compañía a la bancarrota y te echarán, pero para entonces ya habrás acumulado suficientes bonos como para no preocuparte. De hecho, probablemente tengas un currículum bastante atractivo para otros empleos financieros, mostrando un historial que aparentemente demuestra que la mayoría de las veces hiciste ganar a tu empresa.

No sé lo suficiente como para afirmar si esto pasó en alguna de las crisis recientes, y seguro los economistas de un partido o de otro discutirán eternamente. Pero Taleb describe muchos casos de operadores que parecían triunfar durante años, hasta que de pronto hundieron a sus compañías en pérdidas que superaban todas sus ganancias previas. Y las actualizaciones en el sitio de Taleb parecen indicar que cree que esto aplicaba directamente a Fannie Mae, la semiprivada compañía estadounidense a la que muchos culpan de la crisis financiera.

En cualquier caso, resulta sospechoso que haya tantos ejemplos donde ejecutivos salieron con millones en el bolsillo, dejando atrás empresas quebradas que los contribuyentes tuvieron que rescatar.

¿De qué color es tu cisne?

Del pódcast Math Mutation 164

La semana pasada, uno de los temas más comentados aquí en Hillsboro fue el anuncio de ganancias trimestrales de nuestro mayor empleador local. Como en todas las empresas, esas ganancias afectan el valor de las acciones, los bonos y un montón de otras estadísticas financieras arcanas. Pero ¿son realmente las ganancias a corto plazo una buena forma de juzgar a una empresa? ¿Podrían ser inherentemente inexactas o incluso engañosas? Recientemente leí el libro El cisne negro de Nassim Nicholas Taleb, que ofrece una perspectiva única sobre este tipo de mediciones, con implicaciones mucho más amplias para toda la sociedad.

En la terminología de Taleb, un "cisne negro" es un acontecimiento de baja, pero no nula, probabilidad, difícil o imposible de predecir con el conocimiento disponible, cuyos efectos son tan grandes que eclipsan a muchos otros eventos previos de alta probabilidad. Un buen ejemplo en el mundo corporativo —que también mencionamos en la sección anterior— es el caso de aceptar el riesgo de una pérdida catastrófica a cambio de beneficios inmediatos. Si soy un directivo financiero que puede ganar un bono de un millón de dólares invirtiendo en derivados riesgosos, con un 5% de probabilidad de perder cien millones de dólares de la empresa, puedo durar varios años y marcharme millonario antes de que ocurra el cisne negro de la pérdida. Cada año podría reportar ganancias masivas, mientras nadie vigila los riesgos acumulados.

Pero los cisnes negros no se limitan a los inversionistas en derivados; si observamos con atención, aparecen en toda nuestra sociedad. Por ejemplo, imagina ser un empleado del World Trade Center el 10 de septiembre de 2001, planeando con confianza tu carrera y tu futuro. O, yendo más atrás, si fueras ciudadano del Imperio austrohúngaro en 1913, probablemente asumías que tu vida y tu sustento eran bastante seguros, y que cualquier cambio sería incremental y fácil de sobrellevar... hasta que llegó el cisne negro de la

Primera Guerra Mundial. Piensa también en tu propia vida: ¿estás exactamente donde imaginabas estar hace 10 o 20 años? Lo más probable es que en algún momento un cisne negro haya aparecido, provocando un cambio drástico en una dirección u otra. Si cierto reclutador no hubiera programado un viaje extra fuera de temporada a Carnegie Mellon hace 22 años, buscando un becario justo en mi área de investigación, mi vida sería muy distinta hoy. Apenas habría oído hablar de Oregón, conocería Intel solo por una calcomanía en mi PC, y el mundo quizá se habría visto privado de Mutaciones Matemáticas.

En última instancia, Taleb sostiene que casi todos los grandes cambios de la historia y de la sociedad —así como de las vidas individuales— han resultado de estos cisnes negros: eventos impredecibles, de baja probabilidad pero con efectos desproporcionadamente enormes. Esto contrasta con la tendencia de los libros de historia a tratar todo como un flujo predecible, lo que Taleb llama la "falacia narrativa". Tenemos un instinto natural de construir historias y explicar los acontecimientos como racionales y previsibles; pero la verdadera prueba es ver quién los predijo de antemano. Por ejemplo, tu libro de historia cuenta que la Primera Guerra Mundial fue una consecuencia natural de tensiones acumuladas en Europa; pero ¿cuántos inversionistas reestructuraron sus carteras en 1913 para anticipar la "inevitable" guerra? Muy pocos. Si realmente hubiera sido tan predecible, seguramente muchos habrían apostado su dinero.

Entonces, si estos sucesos de baja probabilidad pero alto impacto son realmente factores clave para reconfigurar nuestras vidas y sociedades, ¿significa eso que estamos a la deriva, a merced del azar? La respuesta de Taleb es no. Lo que necesitamos es reconocer este factor, asumir nuestra falta de conocimiento sobre los próximos cisnes negros, y usarlo para guiar nuestras acciones. Por ejemplo, Taleb prefiere el capitalismo de libre mercado frente a la planificación centralizada, pero por razones distintas a las de muchos libertarios: el libre mercado nos permite "tirar los dados" en múltiples oportunidades, hasta que aparece el cisne negro de un Ford, un Intel o un Apple que encuentra un conjunto de innovaciones capaces de transformar la sociedad. Los planificadores centrales, avanzando con cautela una opción de bajo

riesgo cada vez, casi nunca ofrecen ese nivel de innovación.

En tu vida personal también es importante considerar el factor del cisne negro. Debes cuidarte de los casos en que enfrentas un cisne negro negativo: un ejemplo común es contratar un seguro contra incendios, un gasto pequeño ahora para que el cisne negro de un incendio no te arruine por completo. Y, a la inversa, colocarte en posición de aprovechar los cisnes negros positivos: en algún momento puedes toparte con una oportunidad rara y con un potencial inusualmente alto, como aquella visita de reclutamiento que cambió mi rumbo en la universidad. Asegúrate de aprovechar esas ocasiones. Serán escasas, pero es probable que aparezcan de vez en cuando.

Y lo más importante: reconoce que todos esos comentaristas que pontifican y "explican" cada evento inusual en la historia, en las noticias o en tu vida están, en su mayoría, llenos de aire caliente, a menos que lo hayan predicho antes de que ocurriera. Lo más probable es que incurran en la falacia narrativa, racionalizando los sucesos improbables después del hecho, solo para sonar inteligentes.

Desventaja comparativa

Del pódcast Math Mutation 165

¿Has oído hablar de la Ley de la ventaja comparativa? Es un famoso descubrimiento económico del siglo XIX que al principio resulta contraintuitivo, pero cobra sentido cuando aplicas algunos números básicos. Supón que un país es mejor produciendo todo que otro. Esta ley afirma que, en muchos casos, a ambos les conviene que cada uno produzca lo que mejor hace y comercien entre sí, en lugar de que el país más productivo se aísle. Es uno de los argumentos fundamentales a favor del libre comercio, y suele ser malinterpretado o ridiculizado por quienes no lo entienden a fondo. Hay que aclarar que, como muchas teorías económicas, el modelo matemático en que se apoya es simplificado frente al mundo real, y existen críticas legítimas que no alcanzamos a cubrir aquí. Pero el concepto de cisne negro de Taleb, del que hablamos en la sección anterior, añade un giro sorprendente a la ley.

Para empezar a entender la ventaja comparativa, veamos un ejemplo sencillo. Supongamos que Francia puede producir vino a 1 dólar la botella y cerveza a 2 dólares, mientras Alemania produce cerveza a 3 dólares y vino a 4. En principio, Francia es mejor en todo, así que podría cerrarse y negarse a comerciar. Aquí me limito a los números, ignorando el malestar social de obligar a una población a beber cerveza francesa. Asumamos además que cada país dispone de 120 millones de dólares para gastar en bebidas, y quiere consumir cantidades iguales de vino y cerveza. Con un poco de álgebra, vemos que Francia producirá 40 millones de botellas de cada producto, y Alemania unas 17 millones de cada uno, para un consumo total de unos 57 millones de botellas de cada bebida entre los dos países.

Ahora supongamos que deciden comerciar, y cada cual se especializa en lo que mejor hace: vino en Francia a 1 dólar la botella, cerveza en Alemania a 3. Si los 240 millones de dólares combinados se usan de nuevo para producir cantidades iguales de vino y cerveza, se obtienen 60 millones de botellas de cada una: el consumo total de

ambos países sube en 3 millones de cada bebida. Incluso con una economía basada en vino y cerveza, tanto franceses como alemanes deberían ver la ventaja. La clave aquí es el costo de oportunidad: antes, cada botella de cerveza producida en Francia costaba la oportunidad de producir 2 botellas de vino. Al comerciar, ese costo desaparece.

¿Y cuál es el giro que aporta Taleb? Recuerda el cisne negro: debemos tener en cuenta los sucesos de baja probabilidad pero alto impacto, improbables en un año dado, pero suficientemente probables a largo plazo como para que ocurran. Supón que Francia toma muy en serio la ventaja comparativa y dedica casi todo su esfuerzo nacional a producir vino. Y de pronto aparece una plaga que arrasa con la cosecha. El país estaría en serios aprietos. En general, cisnes negros que destruyen temporalmente la productividad de una industria —por enfermedad, desastre natural o guerra contra un proveedor clave— ocurrirán tarde o temprano. Este peligro no es teórico: basta recordar la hambruna irlandesa de la papa, cuando Irlanda dependía demasiado de un solo cultivo que colapsó por una enfermedad. Así que, incluso con la ventaja comparativa, es vital que las naciones se diversifiquen al menos un poco, en lugar de poner toda su economía en un par de industrias óptimas.

Aclaremos que algunos comentaristas han confundido la crítica de Taleb con otras críticas basadas en valores sociales o políticos, cuyo mérito o falta de él está fuera del alcance de este libro. Creo que en esas discusiones a veces se pierde el punto: la idea del cisne negro es tan matemática, en cierto sentido, como la teoría de la ventaja comparativa. El hecho de que algo poco probable en el corto plazo pueda ser muy probable en el largo es un principio básico de la probabilidad. Por ejemplo, si un desastre improbable tiene un 1% de probabilidad anual, parece un riesgo remoto. Pero con un cálculo sencillo, resolviendo n para que $(0{,}99)^n < 0{,}5$, vemos que en 69 años —una vida humana— hay más de un 50% de probabilidad de que ocurra. Y en la práctica, ni siquiera podemos calcularlo con tanta precisión: sabemos que muchas cosas pueden salir mal, pero nunca tendremos datos suficientes para modelarlas por completo. Por eso debemos protegernos contra estos desastres desconocidos, asegurando que nuestra capacidad productiva

y nuestra base de proveedores sean diversas, y que seamos robustos en general frente a los cisnes negros.

Dinero para las matemáticas

Del pódcast Math Mutation 182

Últimamente los medios han estado llenos de historias sobre Yitang Zhang, un profesor de matemáticas que pasó por tiempos difíciles y cuya carrera incluyó trabajos como contable y como empleado en un local de sándwiches Subway. Zhang logró un gran avance hacia la demostración de la conjetura de los primos gemelos. Como recordarás, los primos gemelos son pares de números primos que difieren en 2, como 3 y 5, o 41 y 43. Zhang no demostró realmente el teorema de que existen infinitos pares de primos gemelos, pero sí un resultado relacionado: para algún número N menor que 70 millones, existen infinitos pares de primos separados por N. No voy a repetir toda esa historia en detalle —si estás leyendo este libro, seguramente ya la habrás visto u oído—. Pero el tema de hoy surge de una pregunta curiosa que alguien me hizo tras leer ese artículo: "Entonces, ¿cuánto dinero gana por eso?"

Primero deberíamos preguntarnos: ¿por qué habría una recompensa monetaria por resolver ciertos problemas matemáticos? La percepción de que debería ser así probablemente proviene de la publicidad en torno al Premio del Milenio del Instituto Clay: un millón de dólares por resolver cualquiera de 7 famosos problemas matemáticos, premio anunciado en el año 2000. Este instituto fue fundado por un empresario exitoso, Landon T. Clay, una forma bastante típica de organizar estas iniciativas. Lamentablemente, la conjetura de los primos gemelos no está entre los 7 problemas, así que aunque Zhang hubiera demostrado el teorema completo, no habría ganado ese millón. Existen otros premios monetarios en matemáticas, aunque ninguno tan grande como el del Instituto Clay. Zhang sí ganó varios de esos premios, sumando unos 150 mil dólares, así que no hay que sentir demasiada lástima por él.

Probablemente la historia más interesante sobre un premio matemático sea el origen del Premio Wolfskehl por el Último Teorema de Fermat, otorgado en 1996 a Andrew Wiles de Princeton. Como

recordarás, el Último Teorema de Fermat es la famosa conjetura de 1637 que afirma que la ecuación $a^n + b^n = c^n$ no tiene soluciones enteras para $n > 2$. Durante siglos, hasta que Wiles lo resolvió, muchos matemáticos dedicaron sus vidas a intentar demostrarlo. El premio fue creado por el matemático alemán Paul Wolfskehl. Según la leyenda, Wolfskehl había sido rechazado por una mujer y estaba tan deprimido que decidió suicidarse a medianoche. Pero como tomó esa decisión a primera hora de la tarde, le sobraba tiempo, así que se fue a la biblioteca a pasar las horas leyendo. Allí, mientras revisaba un artículo del matemático Ernst Kummer, descubrió un error en una de las demostraciones relacionadas con el teorema de Fermat y comenzó a trabajar en cálculos para corregirlo. Logró arreglar el fallo, aunque sin probar el teorema, y ese trabajo le llevó toda la noche. Para cuando llegó la medianoche, había olvidado su plan de suicidio. Al amanecer estaba tan entusiasmado con su aporte original a las matemáticas que ya no quería morir. En celebración del teorema que le salvó la vida, modificó su testamento para dejar un premio de 100 mil marcos a quien lograra probarlo.

Como pasa con muchas buenas historias, hay dudas sobre si esta es del todo cierta. En Internet circulan otras versiones sobre el origen del premio. Una dice que Wolfskehl quiso ser médico, pero la esclerosis múltiple le impidió ejercer, y se dedicó a las matemáticas: según esta versión, el premio celebraba la oportunidad que las matemáticas daban a los discapacitados. Otra historia más oscura cuenta que, debido a su enfermedad, tuvo que casarse con la única mujer que aceptó estar con él, una mujer cruel y desesperada que lo trataba fatal; en venganza, dejó su dinero a un premio matemático en lugar de a ella.

Sea cual sea la verdadera historia, ¿deberían las personas dedicarse a las matemáticas con la esperanza de hacerse ricas gracias a estos premios? Creo que hay formas mucho más fáciles: si eres bueno en matemáticas y tu única motivación es el dinero, tus probabilidades de hacerte rico son mucho mayores en el sector financiero. En muchos casos, incluso comprando un billete de lotería tendrás mejores probabilidades. Resolver uno de los grandes problemas matemáticos requiere un tipo especial de genio y dedicación: fíjate cuántos años pasó Zhang en los márgenes de su profesión antes de lograr su avance.

Y para cuando Wiles ganó el premio Wolfskehl, este valía solo unos 45 mil dólares, apenas unos meses de sueldo para él. Incluso la Medalla Fields, el "Nobel" de las matemáticas, paga solo un tercio de esa suma. Si estás en la trayectoria de talento necesaria para resolver uno de estos problemas, sospecho que la recompensa monetaria es lo último en lo que piensas.

Gustar de la lotería

Del pódcast Math Mutation 191

Si eres de los que escuchan pódcast de matemáticas, seguramente has oído la frase de que una lotería estatal es un "impuesto a la estupidez", ya que la gente poco lista desperdicia dinero en algo con valor esperado negativo. Pero, ¿es realmente tan simple? ¿El hecho de que el valor esperado sea negativo convierte automáticamente en irracional jugar? ¿Y cambiaría esto si el valor esperado pasara a ser positivo?

Empecemos repasando el concepto de valor esperado. En esencia, es la suma de los valores posibles de tu billete de lotería, cada uno multiplicado por la probabilidad de que ocurra. Por ejemplo, imagina una lotería local en la que pagas 1 dólar para elegir un número del 1 al 10, y si aciertas, ganas 6 dólares. Tu valor esperado sería $9/10 \times -1$, ya que en 9 de 10 casos pierdes tu dólar, y $1/10 \times 5$, para un total de −40 centavos. Eso representa lo que ganarías o perderías en promedio si jugaras cientos de veces. Las loterías reales funcionan igual, salvo que con probabilidades diminutas y premios en millones. Casi siempre tienen valor esperado negativo: por ejemplo, un sitio calculó recientemente que el valor esperado de un billete de Powerball en EE.UU. es de −1,58 dólares. Y eso sin contar que quizá tengas que compartir el premio con otro ganador ni los impuestos que se llevan una buena parte.

Ahora la pregunta clave: supongamos que, tras varias semanas sin ganador, el bote de Powerball crece hasta cientos de millones, y el valor esperado se vuelve positivo. ¿Sería entonces racional jugar? Yo diría que no: aun así es mucho más probable que te caiga un rayo, mueras por la picadura de una abeja o en un accidente aéreo que ganar. El cálculo de valor esperado solo cobra sentido si compras millones de billetes, en cuyo caso puedes evaluar si tu gigantesca apuesta será rentable. De hecho, un grupo inversor intentó comprar todos los boletos de una lotería en Virginia hace unos años, pero no pudieron imprimirlos todos a tiempo.

Otra manera de ver lo limitado del valor esperado es un ejemplo del estadístico Alan Salzberg: imagina una lotería en la que gastas todos tus ahorros a cambio de una probabilidad de 1 en 1.000 de ganar 10 mil millones de dólares. Si tienes menos de 10 millones en el banco, el valor esperado es positivo. ¿Jugarías? Creo que el 99,9% de la gente pensaría que es una locura. Cuando solo puedes jugar una vez, importa más el impacto probable en tu vida que la media estadística de miles de ensayos. Y aquí, casi seguro, te quedarías en la ruina.

Entonces, si el valor esperado no basta, ¿cómo decidir si jugar es racional? La clave está en el costo real para ti del billete. Si tu situación económica es estable, gastar un par de dólares por semana es prácticamente irrelevante: seguro que gastas más en patatas fritas de máquina o en cafés de Starbucks. Por ese costo casi nulo, ¿qué obtienes? La emoción de rascar un boleto o ver el sorteo, y la diminuta pero real posibilidad de hacerte millonario. Puede que eso solo ya valga la pena. Además, sabes que parte del dinero se destina a financiar al gobierno: según tus ideas políticas eso te parecerá bien o mal, pero incluso si eres un libertario acérrimo, habrá al menos un par de servicios públicos que no te molestará sostener. Y seguro prefieres dar dinero voluntariamente a que te lo cobren vía impuestos más altos.

Claro que no digo que jugar siempre sea buena idea: todo esto parte de que el billete sea un costo insignificante para ti. Si no lo es —si esos 2 dólares semanales marcan una diferencia real en tu vida, o si gastas más de lo que puedes perder—, entonces es una mala decisión: las probabilidades de ganar son tan ridículas que no justifica el gasto. Siempre es triste ver a gente humilde echar lo que parecen cientos de monedas en las máquinas de videopóker de la Lotería de Oregón en los bares. Si ahorraran ese dinero para comprar un seguro contra meteoritos, tendrían más posibilidades de beneficiar a sus familias a largo plazo.

En conclusión, ¿jugar a la lotería te hace estúpido? Yo diría que no. Es un ejemplo de cómo mucha gente aplica una fórmula matemática sin pensar qué significa. Si el costo de un boleto es prácticamente nulo para tu economía, jugar puede ser perfectamente racional.

Tonterías numéricas

Del pódcast Math Mutation 70

Recientemente estaba en un restaurante de comida rápida local y vi una hamburguesa que se veía bien por 1,98 dólares. Pedí dos de esas hamburguesas, más una gaseosa de 99 centavos, y la cajera me dijo que el total era 6,93. La miré, confundido, e intenté razonar con ella.

—Verás, esa hamburguesa que pedí cuesta unos 2 dólares, ¿no? Y pedí dos, más una gaseosa de un dólar. ¿No debería el total rondar los 5 dólares?

Ella se mostró algo molesta.

—Entonces, ¿no va a pagar el monto que aparece en la caja registradora?

Intenté una vez más razonar con ella, con valentía.

—Mira, 2 + 2 + 1 = 5. Así que el total debería estar cerca de 5 dólares. Aquí hay algo mal.

Se rindió y fue a buscar al encargado. Pude escuchar cómo hablaba con él, aunque no se dio cuenta:

—Hay un cliente furioso adelante que se niega a pagar su comida.

Innecesario decir que, cuando el gerente finalmente revisó la situación, resultó que ella me había cobrado una hamburguesa extra.

Pero aún así me quedé pasmado de que una adolescente estadounidense en edad de secundaria careciera de la habilidad básica de estimar que 2 + 2 + 1 = 5, y por tanto, que algo había salido mal. Mi confusión se aclaró cuando investigué un poco en Internet y descubrí que muchos sistemas escolares están usando calculadoras desde primer grado. No me malinterpretes: creo que en algunos casos, como en clases avanzadas de ciencias o aplicación de fórmulas, puede tener sentido usar una calculadora en la escuela. Pero pensando en mis días de primaria, creo que gran parte de mi “sentido numérico” lo desarrollé haciendo montones de cálculos sencillos en papel. Claro, técnicamente es lo mismo recordar que 2 + 3 = 5 tras repetirlo muchas veces en cálculos manuales, que teclear 2 y 3 en una caja negra mágica y obtener 5… pero el proceso mental es muy diferente. Cuando lo haces a mano,

inevitablemente notas patrones y adquieres una “sensación” inherente de los números. Si lo único que haces es teclear mecánicamente y recibir una respuesta garantizada, puedes perder incluso los impulsos básicos de curiosidad por lo que ocurre.

En la red parece haber hoy en día una clara reacción contra la tendencia de usar calculadoras en las escuelas. Como yo, muchos adultos educados se horrorizan al ver que, si se pide un cálculo tan simple como 300 dividido 3, una buena parte de los adolescentes educados con calculadora recurren a ella en lugar de pensar y dar una respuesta rápida. No importa cuán sofisticada sea nuestra tecnología, siempre habrá dedos humanos, o impulsos cerebrales, introduciendo datos en nuestros dispositivos de cálculo, y por tanto, siempre habrá margen para el error humano en algún punto. Tener un sentido numérico básico, y poder entender si un resultado aritmético sencillo está o no en el rango correcto, seguirá siendo un componente crítico para verificar cálculos y evitar desastres. ¿Acaso en unos años oiremos de un puente que se derrumbó porque un dato en un ordenador estaba errado por un factor de 10, y nadie lo notó?

¿Siempre gana la casa?

Del pódcast Math Mutation 140

Si eres un friki de las matemáticas con un mínimo de respeto propio, a estas alturas seguramente ya habrás oído la leyenda urbana del grupo de estudiantes del MIT que en los años 90 ganó millones jugando al blackjack en los casinos de Las Vegas, inmortalizados en el libro Bringing Down the House, de Ben Mezrich, y en la película 21. Leí el libro durante las vacaciones y lo disfruté bastante; no es gran literatura, pero sí una lectura ligera y entretenida. Lo que más me sorprendió fue la simplicidad básica del esquema de conteo de cartas que usaban los estudiantes del MIT.

Recordemos lo esencial: el blackjack es un juego sencillo en el que recibes dos cartas y puedes pedir más con el objetivo de llegar a 21 sin pasarte. Las figuras cuentan como 10, y los ases como 1 u 11. Como los repartidores van entregando cartas del mismo mazo durante muchas manos seguidas, es un juego con "memoria", donde las manos previas influyen realmente en las siguientes. Compáralo con los dados en el craps (pase inglés): ahí cada tirada es independiente, y buscar patrones es inútil, porque las probabilidades no cambian. En cambio, en blackjack sí es posible, en teoría, ganar ventaja recordando qué cartas ya han salido. Las técnicas tradicionales de conteo han estimado dar al jugador una ventaja de aproximadamente un 2% a largo plazo.

Ese 2% significa que, si juegas mucho tiempo con apuestas promedio de 100 dólares, en teoría ganarías 102 de media por mano. Pero esta ventaja tan leve implica que en el corto plazo perderás muchas manos, así que necesitarías aguantar grandes pérdidas y tener un fondo enorme para resistir. En resumen, a menos que apuestes mucho y juegues durante largo tiempo, no hay tanto beneficio que obtener. Además, la sabiduría popular decía que el conteo de cartas llevaba décadas siendo prácticamente imposible, ya que los casinos mezclan 6 mazos, creando una enorme cantidad de cartas a seguir.

Pero el equipo del MIT descubrió que esa política de 6 mazos creaba una nueva vulnerabilidad: si se acumulaba un desequilibrio, como una

alta concentración de figuras en las cartas restantes, esa información daba a los jugadores una gran ventaja. Y la ventaja duraba un buen rato, porque había que atravesar las 6 barajas.

El truco era que esto no ocurría con la suficiente frecuencia como para que un solo jugador pudiera aprovecharlo. Así que desplegaron un sistema de "ojeadores": jugadores apostando lo mínimo en múltiples mesas, buscando ese desequilibrio. Cuando aparecía, daban la señal a un "gran apostador" que deambulaba por el casino esperando.

Los ojeadores jugaban continuamente, con apuestas mínimas y llevando una cuenta: un solo número que reflejaba el exceso de cartas altas frente a bajas. Empezaba en 0, y cada carta baja (2–6) restaba 1, mientras que cada carta alta (10, A o figura) sumaba 1. También tenían que dividir entre el número de mazos restantes, ya que un desequilibrio al inicio de la partida sería pasajero, mientras que uno hacia la mitad de los mazos daba más beneficios. Este conteo no era tan fácil como parece: las cartas volaban rápidamente en múltiples manos, muchas repartidas a otros jugadores, y para no levantar sospechas debían charlar, pedir tragos, flirtear con las chicas de Las Vegas y comportarse como "jugadores normales". Practicaron mucho en partidas simuladas antes de intentarlo en un casino real.

Cuando el desequilibrio llegaba a cierto nivel, en el que sobraban figuras y la ventaja era clara, el ojeador cruzaba los brazos, señal para el gran apostador. Este, actuando como un ricachón ostentoso, se sentaba sin mostrar relación con el ojeador y comenzaba a hacer apuestas grandes. El ojeador le "pasaba la cuenta" con frases en clave previamente memorizadas. Por ejemplo, si el conteo era 9, podía decir: "¡Rayos, olvidé darle de comer a mi gato!". La palabra gato señalaba el número 9, ya que un gato tiene nueve vidas. El gran apostador sabía así el nivel de desequilibrio y ajustaba sus apuestas. Apostando fuerte en los momentos correctos y poco cuando solo contaban, multiplicaban su ganancia potencial. Así fue como ganaron millones.

Claro que una vez que el casino sospechaba de alguien, era fácil reaccionar: lo más simple era barajar más seguido, sin esperar a agotar los 310 naipes de los 6 mazos, reduciendo la ventana de vulnerabilidad. Otra medida era prohibir que se unieran nuevos jugadores a media partida o que se subieran las apuestas salvo tras una barajada. ¿Por qué

no barajar después de cada mano y eliminar el problema? Mezrich apunta que los casinos quieren que el conteo sea teóricamente posible: así atraen a jugadores ingenuos que creen tener ventaja, pero no cuentan con la habilidad o el dinero necesarios para vencer a la casa de verdad.

Al final, ni siquiera hizo falta tanta sofisticación para frenar al equipo del MIT. Los casinos notaron que ese grupo ganaba demasiado seguido y comenzaron a circular faxes con sus fotos, hasta que fueron vetados de la mayoría de los locales. Los casinos pueden expulsar a sospechosos sin pruebas, lo cual es útil porque legalmente el conteo de cartas ni siquiera se considera trampa: todo ocurre en la cabeza del jugador. Si creemos lo que cuenta Mezrich, hubo además maquilladores de Hollywood, matones armados, policías corruptos y palizas en cuartos traseros, aunque la Wikipedia dice que esos detalles son en gran parte inventados. En todo caso, con el libro y la película ya en circulación, dudo que siquiera el casino más pequeño vuelva a caer en esa técnica exacta. Pero esos chicos del MIT son bastante listos: no me sorprendería que incluso ahora tengan otro equipo exprimiendo a los casinos con métodos nuevos y más retorcidos.

Ascendiendo Mutadamente por la Escalera Corporativa

Del pódcast Mutación matemática 146

Si eres oyente habitual de Mutación matemática, ya estarás acostumbrado a que te hablemos de los rincones más sorprendentes de las matemáticas modernas: fractales, dimensiones superiores, teoría de la complejidad… Pero seguramente piensas que, aunque son temas divertidos de comentar, no van a tener gran impacto en tu vida diaria. ¿Y si te dijera, sin embargo, que aplicar las matemáticas modernas podría darte ideas útiles para ejercer liderazgo en las situaciones cotidianas de los negocios? Suena contraintuitivo, lo sé, pero esa es la tesis de la autora Margaret Wheatley. Veamos algunas de sus ideas.

Para empezar, recordemos el concepto de fractal, como el copo de nieve de Koch que ya comentamos en capítulos anteriores. Tiene esa curiosa propiedad de que, si amplías cualquier trozo por mucho que sea, parece una versión en miniatura del copo original: esa autosimilitud infinita es típica de los fractales. En los objetos matemáticos ideales, cuanto más aumentas la forma, más complejidad ves, toda derivada de reglas o ecuaciones muy simples. En la vida real, montañas y costas se comportan como fractales hasta cierto punto, aunque, claro, su autosimilitud se acaba en algún nivel finito.

¿Y cómo nos puede iluminar esto sobre el liderazgo? Piensa en el conjunto de valores y políticas de tu empresa. Si la compañía está bien dirigida, los valores corporativos que ves en la cúpula deberían coincidir con los que ves en los niveles inferiores. En teoría, deberías poder acercarte a un jefe de línea en la planta y encontrar que promueve la misma actitud corporativa que se respira en la sala de juntas del CEO. Y esto debería surgir de unos principios básicos sólidos, igual que las simples reglas de la curva de Koch generan el complejo copo: no deberías estar intentando especificar centralmente cada borde y cada arista. Si tu empresa no muestra esta simetría autosimilar, es que algo se ha roto por algún sitio, y estás en un terreno peligroso donde los objetivos corporativos no se propagan bien. Hay que identificar dónde termina la simetría para poder corregir la situación. Como dice Wheatley: “Las mejores organizaciones tienen una cualidad fractal.”

Otro aspecto que Wheatley considera relevante es la complejidad infinita de los fractales. A simple vista parecen tener un borde definido, pero al acercarte ves más y más complejidad en el borde, hasta que medirlo es imposible. Como afirma ella: "Los fractales nos muestran la futilidad de buscar medidas cada vez más finas de sistemas discretos." Seguro que ya ves cómo encaja en la empresa: a los directivos les encanta especificar medidas cuantitativas para saber cómo va su organización. Si trabajas en una grande, apuesto a que alguna vez te has desesperado por un requerimiento impuesto desde arriba para medir tu trabajo con alguna estadística arbitraria. Hay que reconocer que puedes tomar un número casi infinito de medidas, y que en la búsqueda de la medida perfecta puedes perderte en refinamientos sin fin. Hay que dar un paso atrás y mirar la estructura subyacente del conjunto, no solo los detalles. Igual que para entender un fractal tienes que encontrar el conjunto de reglas simples que lo generan, para entender tu negocio tienes que pensar en las causas profundas de la organización, no solo medir resultados en la periferia.

Wheatley aplica muchas más ideas de matemáticas y física modernas en su libro Leadership and the New Science y en sus artículos posteriores. Naturalmente, queda la duda de si de verdad usa estas ideas para influir en el pensamiento empresarial, o si las invoca con metáforas forzadas para sonar impresionante mientras aplica consejos de sentido común. Yo mismo soy algo escéptico, por ejemplo, cuando salta de la dificultad de medir fractales a la necesidad de intuición cualitativa: la función generadora de un fractal es tan precisa matemáticamente como medir longitudes de curvas. Me vuelvo especialmente suspicaz cuando empieza a citar a autoridades cuestionables como el abusador de la física cuántica estilo New Age Deepak Chopra o el investigador de perros psíquicos Rupert Sheldrake. En parte, sus ideas parecen listas para un buen "desenmascaramiento" al estilo de Alan Sokal y la mala ciencia, como ya comentamos en nuestro capítulo sobre Ciencia y Escepticismo. Pero, por otro lado, casi todos los libros de negocios que he leído tratan básicamente de inflar ideas de sentido común para que parezcan hallazgos novedosos. Si traer una metáfora de matemáticas avanzadas sirve para convencer a tus jefes locales de implementar políticas más sensatas, ¿por qué no

usarla? Y si soltar palabrería sobre cosas chulas que oíste en Mutación matemática te da ventaja la próxima vez que te entrevisten para un puesto o un ascenso, ¿por qué no aprovecharla? Eso sí, acuérdate de pasarme un porcentaje cuando tu jerga matemática te consiga ese pedazo de aumento.

El Converso de un CEO

Del pódcast Mutación matemática 205

Desde niño, yo aspiraba a convertirme en un Gran Rectángulo. Cuando tenía solo seis años, mi padre me llevó a conocer a uno de los Rectángulos más importantes de Nueva Jersey, y aún recuerdo su consejo: "Asegúrate de tener cuatro lados y cuatro ángulos." Durante toda mi adolescencia trabajé en desarrollar mis cuatro lados y mis cuatro ángulos, mientras leía consejos parecidos en numerosas revistas brillantes para fans de los Rectángulos. En el instituto, mi orientador me mostró folletos con perfiles de Rectángulos famosos que habían cabalgado sus cuatro lados y cuatro ángulos hasta el éxito. Por fin, poco después de cumplir los 18, probé suerte para cumplir mi sueño, haciendo largas colas para audicionar en el popular programa de televisión American Rectangle. Pero cuando subí al escenario me mortificó recibir una carcajada general y acabar como uno de esos pardillos a los que Simon Cowell ridiculiza en el episodio de audiciones fallidas. Con tantos años de esfuerzo, no me había convertido en un Rectángulo, sino en un simple Trapecio.

Vale, esa anécdota puede sonar un pelín absurda, pero piensa un momento en la premisa. Supón que quieres tener éxito en una profesión difícil. Lo natural es buscar a quienes ya han triunfado y pedirles consejo. Si ves que una gran proporción de esas personas exitosas hizo algo en particular, concluyes que seguir esos pasos te llevará al éxito. La mayoría no aspiramos literalmente a convertirnos en figuras geométricas, pero seguro que recuerdas muchos consejos similares: practicar muchas horas, levantarte temprano cada día, escoger una carrera universitaria adecuada… Yo empecé a reflexionar sobre este tema después de mirar una bonita herramienta de orientación profesional para estudiantes de secundaria, que les permite seleccionar profesiones y leer atributos y consejos de quienes ya son exitosos en ellas.

Por desgracia, este tipo de búsqueda de consejo en los exitosos reproduce una falacia matemática básica. En términos lógicos simples,

una implicación “A implica B” es distinta de su converso “B implica A”. Ninguna se deduce de la otra: “A implica B” no significa que “B implique A”. En el caso de los rectángulos esto parece obvio: tener cuatro lados y cuatro ángulos (condición A) NO implica ser un rectángulo (consecuencia B). Al observar que todos los rectángulos tienen esas características, aprendemos lo contrario: ser un rectángulo implica tener cuatro lados y cuatro ángulos. Es importante reconocerlo, porque puede haber infinitos objetos no rectangulares que cumplan esa condición, y los rectángulos representar solo una pequeña parte de las posibilidades. Si quisiéramos aislar condiciones que sí impliquen que algo es un rectángulo, tendríamos que mirar tanto rectángulos como no rectángulos, para identificar propiedades exclusivas, como tener cuatro ángulos rectos. Una vez con un conjunto de propiedades que solo pertenezca a los rectángulos y no a los no-rectángulos, entonces podríamos formular un conjunto inteligente de precondiciones.

Lamentablemente, la vida real no nos ofrece figuras geométricas. Cuando sustituimos esta aspiración por una real, demasiadas personas intentan deducir las claves del éxito solo observando a los exitosos. Sin pensar en esta falacia lógica básica, “A implica B” no significa “B implica A”, muchos pierden tiempo y dinero siguiendo caminos donde su probabilidad de éxito es mínima. Un caso común entre la generación media actual es el del joven aspirante a escritor que decide estudiar Filología Inglesa. Puede ver que muchos escritores exitosos tienen ese título, sin fijarse en que la proporción de licenciados en inglés que acaban siendo escritores de éxito es ínfima. La frase “Si hoy eres un escritor de éxito, probablemente tengas un título en inglés” no implica “Si consigues un título en inglés, probablemente serás un escritor de éxito.” En cambio, si miras ingeniería informática, verás un perfil parecido entre los más exitosos, pero además descubrirás que, a diferencia de inglés, la gran mayoría de los graduados en informática sí obtienen un buen empleo en ese campo al graduarse. Ahí, por pura coincidencia, la implicación funciona en ambos sentidos, pero las dos proposiciones son independientes.

Hasta consultores empresariales famosos caen en esta falacia. ¿Has oído hablar del influyente libro de negocios de los 80 En busca de la excelencia, donde los autores examinaron un conjunto de empresas

exitosas para descubrir sus características? Se convirtió en uno de los libros de negocios más vendidos de todos los tiempos, y muchos líderes siguieron sus conclusiones, con la esperanza de hacer algún día a sus empresas tan exitosas como NCR, Wang o Data General. Pero algunos han criticado la premisa básica de esta investigación por el mismo error: intentar determinar las condiciones del éxito mirando solo a los exitosos conduce inevitablemente al tipo de implicación equivocada. Puede permitirte encontrar un conjunto de precondiciones que ser exitoso significa que has tenido, mientras esas mismas precondiciones están presentes en infinidad de empresas fracasadas. Hay que estudiar tanto el éxito como el fracaso para encontrar condiciones que impliquen éxito de manera única.

Así que, cuando tú o tus hijos penséis en vuestro futuro, mirad con cuidado toda la información disponible, no solo los casos de éxito. Recordad siempre que una afirmación lógica "A implica B" es verdaderamente distinta de su converso "B implica A", y tenedlo en cuenta al tomar decisiones.

CAPÍTULO 11

Mirando la vida

A menudo ocurre que los frikis de las matemáticas y la física miran por encima del hombro a las "ciencias blandas" como la biología y la medicina. Sin embargo, las bases matemáticas son cruciales para estas ciencias: en gran medida fue la transición de la observación cualitativa a la medición cuidadosa y cuantitativa la que nos condujo a los asombrosos logros modernos en estos campos. Además, tras pasar muchas horas viendo Animal Planet con mi hija, me encantan las historias en las que los animales o las plantas parecen haber descubierto leyes matemáticas o haber hecho uso de ideas de estas áreas en su lucha por la supervivencia.

Aparte de esto, quizá hayas oído hablar del prometedor campo de la Vida Artificial, en el que los científicos intentan modelar comportamientos animales idealizados con programas de ordenador: esto puede proporcionar a menudo ideas útiles tanto sobre los comportamientos reales de los animales como sobre nuevas maneras de usar esos comportamientos para crear programas informáticos más inteligentes. Puede que hayas visto en línea el comportamiento casi vivo de la famosa simulación "El juego de la vida" de John Conway; si no, te animo encarecidamente a buscarla en la web. Se describe hasta cierto punto en los artículos de abajo, pero ninguna descripción escrita le hace justicia: a partir de unas pocas reglas matemáticas simples puedes construir lo que parece una simulación viva.

Por eso, los temas relacionados con medicina, biología y comportamiento animal han sido una fuente habitual de ideas para Mutación matemática, y aquí comparto algunos de mis episodios favoritos que tocan estas áreas.

Florence Nightingale, friki de las matemáticas

Del pódcast Mutación matemática 85

Seguramente te suene el nombre de Florence Nightingale, apodada "la dama de la lámpara" y conocida como la fundadora de la enfermería moderna. Pero probablemente solo tengas una vaga idea de lo que eso significa en la práctica: ¿descubrió cómo poner inyecciones sin dolor? ¿O inventó un nuevo método para cambiar orinales? En realidad, durante el siglo XIX introdujo conceptos modernos de limpieza e higiene en los hospitales británicos, salvando innumerables vidas al prevenir muchas enfermedades infecciosas comunes que en su época eran prácticamente intratables. Pero un aspecto menos conocido de este logro es que los éxitos de Nightingale no habrían sido posibles sin su amor por las matemáticas y su introducción de métodos estadísticos en la enfermería y la salud pública.

Como hija de una familia británica acomodada, se esperaba que Nightingale dominara las artes sociales y domésticas, se casara con un buen partido y participara en la alta sociedad. Pero desde joven insistió en que la dejaran estudiar matemáticas, y tras muchas batallas emocionales sus padres cedieron, llegando a contratar al famoso teórico de números J.J. Sylvester como uno de sus tutores. Se tomó la materia muy en serio, hasta el punto de salpicar referencias matemáticas en sus cartas personales. Tras asistir a una conferencia política, por ejemplo, escribió a su novio: "He inventado un nuevo sistema de logaritmos (encontrando insuficientes las capacidades de la aritmética) para contar las veces que aparece 'Su Majestad Imperial' en el discurso."

Nightingale escandalizó a su familia al decidir dedicarse a la enfermería y escaparse para atender soldados en el hospital de Scutari, en Turquía, durante la Guerra de Crimea. Al llegar al hospital se horrorizó con las condiciones de suciedad y empezó a llevar una contabilidad detallada de sus actividades mientras desafiaba a las autoridades militares locales y comenzaba a limpiarlo. Por ejemplo, en una semana registró la retirada de 215 carretillas de escombros, 19 descargas del sistema de alcantarillado y la eliminación de los cadáveres de dos caballos, cuatro perros y una vaca.

Más importante aún, empezó a llevar estadísticas comparativas entre hospitales. Registró que Scutari tenía 300-500 pies cuadrados por paciente, frente a 1600 en los hospitales londinenses. Además, anotó las

tasas de mortalidad: 42,7% antes de la limpieza de Scutari, y 2,2% después. Cuando las autoridades no se convencieron de que esto fuera más que una casualidad, buscó dos grupos de control para comparar: pacientes de hospitales londinenses ordinarios, que normalmente estaban mucho menos graves que los soldados en Scutari, y soldados tratados en el campo que estaban demasiado malheridos para ser trasladados. Reunió y analizó con éxito datos que demostraban que antes de la limpieza del hospital los soldados estaban mejor siendo tratados en el campo, pero después Scutari tenía una tasa de supervivencia mejor que las mejores instituciones de Londres. Para persuadir a otros de la importancia de sus mediciones, Nightingale también inventó un nuevo tipo de gráfico circular, conocido como "diagrama de área polar", básicamente un gráfico de pastel que muestra las cantidades mediante el aumento o disminución del radio del círculo en un ángulo dado.

Tras sus logros en Scutari, probados mediante sus mediciones y estadísticas detalladas, Nightingale continuó una distinguida carrera en enfermería y estadística. Entre sus logros posteriores figuran asesorar al ejército de la Unión en la Guerra Civil estadounidense, fundar una facultad de medicina para mujeres e introducir la atención médica moderna y la enfermería en la India. Recibió premios como la Cruz Roja Real y la Orden del Mérito, fue elegida miembro honorario de la Asociación Estadística Americana y fue la primera mujer miembro de la Real Sociedad Estadística Británica.

El genio que hizo trampa

Del pódcast Mutación matemática 112

Seguro que en el instituto, en la clase de biología, aprendiste la historia del monje austríaco Gregor Mendel, que en los años 1850 y 1860 cruzó meticulosamente muchas variedades de guisantes en su jardín y elaboró la primera teoría moderna de la genética. Observando cuidadosamente un conjunto de rasgos de las plantas en su jardín concluyó que esos rasgos estaban determinados por factores hereditarios, luego llamados genes, y que cada planta llevaba dos de esos genes para cada característica, uno de cada progenitor. Se adelantó a su tiempo y su trabajo fue en gran parte ignorado hasta los años 1900, a pesar de ser un paso importante en nuestra comprensión de la biología. Pero ¿sabías que, según muchos estadísticos del siglo XX, casi con seguridad maquilló sus resultados?

Para entender por qué es probable que hiciera trampa, veamos primero sus teorías. Como ejemplo, tomó dos líneas estables de plantas, una con flores moradas y otra con flores blancas, y las cruzó. En la primera generación todos los descendientes tuvieron flores moradas. Pero al cruzar esos descendientes, en la siguiente generación obtuvo 75% moradas y 25% blancas. Este resultado desconcertante podía explicarse porque cada planta de la primera generación heredaba un gen morado dominante y un gen blanco recesivo. Luego, al cruzar dos de esa generación, había un 25% de probabilidad de que la descendencia tuviera dos genes morados y, por tanto, flores moradas; un 50% de probabilidad de recibir un gen morado y uno blanco, también con flores moradas por la dominancia del morado; y un 25% de probabilidad de dos genes blancos, dando flores blancas.

Mendel hizo este tipo de análisis en siete características diferentes de sus plantas, y el resultado fue su teoría de la herencia, con dos leyes principales. La ley de la segregación decía que, cuando un individuo se reproduce, transmite uno de cada par de genes a su descendencia. La ley de la combinación independiente afirmaba que los genes se mezclan de manera independiente durante la reproducción. Aproximadamente,

estas teorías eran correctas y supusieron un gran paso adelante en la comprensión de la genética.

Pero en varios aspectos Mendel tuvo mucha suerte. Primero, en la vida real la ley de la combinación independiente no es del todo cierta: si dos genes están cerca en el mismo cromosoma, es muy probable que se transmitan juntos. Mendel eligió casualmente características que eran en gran medida independientes, no estando próximas en ningún cromosoma. Otra complicación es que para muchas características no hay dominancia completa de un rasgo sobre otro, sino combinación: por ejemplo, si hubiera trabajado con flores de boca de dragón habría encontrado que padres blancos y rojos producen descendencia rosada. Un tercer problema es que muchas características reales tienen múltiples contribuyentes genéticos: las razas de gatos de pelo corto "Devon Rex" y "Cornish Rex", por ejemplo, se parecen pero su pelo corto está causado por dos genes diferentes. Las elecciones afortunadas de Mendel eliminaron todas estas dificultades.

Lo más demoledor, sin embargo, es un análisis realizado por el estadístico R. A. Fisher en los años 30. Utilizó lo que se llama una prueba "chi cuadrado": una técnica estadística en la que se suman los cuadrados de las diferencias entre la frecuencia esperada y la observada de un evento, divididos por la frecuencia esperada. Suena raro, pero tiene la ventaja de que genera una gráfica cuyo área a la derecha del valor observado es proporcional al "valor p" o probabilidad de que el resultado ocurriera por azar. Usando esta técnica, Fisher determinó que los resultados de Mendel eran demasiado buenos: había solo 4 entre 100.000 posibilidades de que sus datos confirmaran sus hipótesis tan exactamente. Es decir, la combinación aleatoria de genes debería haber producido frecuencias de rasgos vegetales que confirmaran sus hipótesis, pero no con números tan exactos.

¿Qué concluimos de todo esto? Tal vez Mendel fue demasiado abierto sobre sus teorías con los monjes jóvenes que le ayudaban en el jardín y ellos tenían demasiado empeño en complacer a su superior. Los científicos modernos saben muy bien que los mejores experimentos son "doble ciego", gestionados por asistentes que no conocen la hipótesis prevista, para evitar que, incluso con buenas intenciones, los humanos sesguen inconscientemente los resultados. Por otro lado,

quizá Mendel simplemente seleccionó —o deberíamos decir "desgranó"— sus resultados, descartando pruebas malas como probablemente debidas a error humano. Tal vez estamos viendo lo que hoy se llama "sesgo de publicación", donde Mendel solo habló del subconjunto de experimentos que parecían dar resultados positivos y descartó los demás por poco interesantes o por error humano. O quizá tuvo una suerte increíble. Algunos académicos incluso han producido análisis complejos que sostienen que, por razones sutiles no tenidas en cuenta por Fisher, los resultados de Mendel son estadísticamente correctos tal cual, aunque estos análisis me resultaron un poco difíciles de seguir.

En última instancia, ¿fue Mendel un genio o un fraude? A pesar de las dudas sobre la validez de sus experimentos, desarrolló teorías fundamentales de la genética moderna que son cruciales para la investigación biológica y médica actual. Así que tal vez fue un poco de ambas cosas.

El trasero de la lanzadera

Del pódcast Mutación matemática 72

¿Has oído esa historia de que el ancho de los cohetes aceleradores del transbordador espacial puede rastrearse directamente hasta el ancho del trasero de un caballo romano? Así va el cuento.

Aparentemente, los cohetes de combustible sólido del transbordador se transportan por ferrocarril y necesitan ajustarse al ancho estándar de vía para poder pasar por los túneles. Ese ancho estándar es de unas 4 pies y 8,5 pulgadas. Este ancho viene de las normas establecidas en Inglaterra. Los ingleses fijaron esa norma porque los primeros trenes se diseñaron basándose en carruajes tirados por caballos, y ese era el espaciado estándar de las ruedas. Las ruedas de los carruajes tenían ese espaciado porque se habían construido así durante siglos para encajar en los surcos de las viejas carreteras. Y las grandes carreteras de Inglaterra y Europa fueron construidas en su origen por los antiguos romanos, que tenían un ancho estándar de rueda para sus carros de guerra. Y, por último, los carros se diseñaban para que encajaran con el ancho de los cuartos traseros de una pareja de caballos de guerra. Así que, ¡los cohetes del transbordador espacial se basan directamente en el trasero de un caballo romano!

Es un cuento simpático, pero sonaba un poco sospechoso, así que consulté algunas webs de leyendas urbanas, como Snopes y The Straight Dope. Mis sospechas se confirmaron: hay bastantes agujeros en la historia. Para empezar, los túneles ferroviarios son significativamente más anchos que las vías, aunque quizá alguna limitación relacionada con túneles haya reducido el tamaño de los cohetes. En cuanto al ancho estándar: en el siglo XIX hubo muchos diseñadores estadounidenses creativos que experimentaron con diferentes anchos de vía. Durante la Guerra Civil, la Confederación tenía tres tamaños distintos de vía, y eso pudo contribuir a su derrota. El Norte había maximizado su eficiencia usando el ancho más popular como estándar. Tras la guerra, la infraestructura destruida del Sur se reconstruyó (con organización

centralizada) para coincidir con la del Norte, y así fue como EE.UU. acabó con un ancho de vía estándar.

Pero, más fundamentalmente, creo que esta historia es un ejemplo clásico de cómo correlación no significa causalidad. En otras palabras, que un evento ocurra antes que otro no significa que sea la causa del segundo. Es cierto que al inicio de la era ferroviaria las ruedas de los carruajes tenían aproximadamente el mismo ancho que los carros romanos, pero eso se debe a que, desde la antigüedad hasta la Revolución Industrial, la tecnología de transporte fue constante. Ya fueras un auriga romano o un colono del siglo XIX, usabas vehículos con ruedas tirados por pares de caballos. Así que la causa común —el ancho del trasero de una pareja de caballos— explica los anchos de los carros romanos, de los carruajes medievales ingleses y de los primeros ferrocarriles.

Auge y caída

De los pódcast Mutación matemática 14 y 159

Según la página web del Estado de Misuri sobre manejo de conejos, cada hembra puede producir 35 crías por temporada, y la Wikipedia dice que los conejos viven de 5 a 10 años. Si hacemos la estimación conservadora de que una pareja de conejos tiene 3 buenos años reproductivos y redondeamos para llegar a 100 crías, eso significa que cada pareja de conejos resulta en unas 50 veces más conejos en la siguiente generación. Eso significa que tras 2 generaciones habrá 50 × 50, o 2.500 conejos, y en general tras n generaciones, 50^n, una función exponencial.

Por diversión, calculemos ahora cuánto tardaría el planeta Tierra en convertirse en nada más que una gigantesca bola de conejos. El volumen de la Tierra es de aproximadamente $1{,}08\times10^{21}$ metros cúbicos. Un cubo de unos 8 cm de lado parece una buena estimación para el tamaño de un conejo, lo que daría un volumen de 0,000512 metros cúbicos. Así que nuestro planeta equivale a unos $2{,}10\times10^{24}$ conejos. Resolviendo la ecuación $50^n = 2{,}10\times10^{24}$, tomando logaritmos a ambos lados y despejando n, obtenemos una respuesta entre 14 y 15. En otras palabras, ¡tras solo 15 generaciones de conejos no quedaría materia no-conejo en el planeta! Todo un Domingo de Pascua.

Esto quizá te lleve a la pregunta obvia: ¿por qué los conejos no se han adueñado ya del mundo? Pues, afortunadamente, hay muchos factores limitantes —como la comida, los depredadores, etc.— que les impiden mantener la tasa ideal de reproducción de este modelo simplista. Pero cuando los conejos se colocan en un entorno nuevo con mucha comida y pocos depredadores, sí vemos un crecimiento explosivo: que se lo pregunten a los australianos, que importaron 24 conejos en 1859 y en 1869 podían cazar dos millones al año sin hacer mella en la población. Aun así, dadas estas cuentas, sigue pareciendo sorprendente que Mutación matemática tenga un número no trivial de oyentes no-conejo.

Veamos cómo podemos modelar las fuerzas contrarias, como la

escasez de alimento o de espacio. Existe en realidad una relación muy interesante, desarrollada por el matemático belga Pierre Verhulst en el siglo XIX, que modela un crecimiento exponencial modificado en presencia de recursos limitados. En realidad describía un modelo continuo usando cálculo, pero al hablar de poblaciones podemos usar la forma discreta simplificada. Supongamos que hay una población máxima que puede soportar el entorno. Sea p_1 la proporción de esta capacidad máxima que hemos alcanzado, r la tasa de crecimiento y p_2 la proporción esperada en la siguiente generación. Entonces la "ecuación logística en diferencias" puede expresarse como:

$$p_2 = r \times p_1 \times (1 - p_1)$$

En otras palabras, simplemente multiplicamos un factor adicional al crecimiento exponencial: $(1 - p_1)$. Con el crecimiento exponencial regular, tendríamos $p_2 = r \times p_1$. El factor adicional tiene en cuenta que, a medida que p_1 se acerca a 1 —el tamaño máximo posible de la población—, esto actúa como fuerza moderadora que reduce el crecimiento. Cuando estamos muy lejos de la saturación, ese $(1 - p_1)$ es aproximadamente 1, así que parece crecimiento exponencial estándar. Cuanto más nos acercamos a la saturación, más se frena el crecimiento por ese factor extra.

Esta fórmula no parece muy compleja, pero si metemos números ocurren cosas muy interesantes. Intuitivamente, ¿cómo esperarías que actuara esta ecuación? Una buena conjetura sería que si empiezas con un valor bajo de p, el crecimiento poblacional será inicialmente rápido y luego se suavizará y alcanzará algún tipo de equilibrio estable. Para una tasa de crecimiento r de 2,9, esto efectivamente ocurre: por ejemplo, si empezamos con p = 0,2, indicando que tenemos alrededor del 20% del número máximo de conejos, vemos que inicialmente salta a 0,46, luego a 0,72, retrocede un poco a 0,58 y finalmente se asienta en un 0,66 constante. Esto muestra que nuestra población se estabilizará en torno al 66% de la capacidad.

Pero para otras tasas de crecimiento vemos resultados muy distintos. Hay muchas tasas para las que la población nunca se estabiliza. Como ejemplo, si usamos r = 3,3, vemos que tras unas

generaciones la población empieza a oscilar entre 0,48 y 0,82. En otras palabras, tenemos generaciones con el 48% de la capacidad máxima de conejos seguidas de generaciones con el 82%, yendo y viniendo para siempre. Para varios otros valores de r, la población acaba oscilando entre 3 o 4 valores. Incluso hay muchos valores, como r = 3,57, en que el valor nunca se estabiliza ni oscila: simplemente parece saltar para siempre entre totales arbitrarios.

¿Qué significa todo esto? Significa que esta simple ecuación en diferencias es un ejemplo de función caótica. Es decir, una función donde un ligero cambio en las condiciones iniciales puede dar resultados muy diferentes. En este caso vemos que pequeños cambios en la tasa de crecimiento pueden darnos una población estable, ciclos de auge y caída, o fluctuaciones aleatorias. Podrías esperar que un cambio pequeño en la tasa produjera un cambio correspondiente en el valor de equilibrio, pero esto sencillamente no es cierto: puedes modificar la tasa un poco y descubrir que has perdido el equilibrio por completo, convertido un equilibrio en un nuevo ciclo de auge y caída o, en efecto, aleatorizado los resultados.

Pero al ver surgir caos de un modelo tan simple creo que también hemos descubierto un hecho sorprendente: en muchas partes de la vida real, los ciclos de auge y caída pueden ser algo natural y esperado. Tendemos a anticipar que las cosas que encontramos a diario alcanzarán algún tipo de equilibrio, ya sea la población de conejos en tu jardín, la economía nacional, el clima del planeta, tu peso o el humor de tu cónyuge. Cuando vemos cosas fuera de equilibrio solemos considerarlo un problema serio y tratamos de averiguar qué ha ido mal. Tras ver el comportamiento de la ecuación logística en diferencias, vemos que los ciclos de auge y caída son algo que realmente surge de procesos simples y naturales. Un ligero ajuste en tus entradas no siempre te dará el resultado bonito y predecible que quieres.

Así que la próxima vez que veas los acontecimientos mundiales o tu vida diaria descontrolarse, respira hondo antes de angustiarte. Puede que sea una crisis real, puede que esté totalmente fuera de tu control, o puede que solo necesites modificar los parámetros de unas cuantas ecuaciones logísticas en diferencias de tu vida real.

Los boids y las abejas líderes

Del pódcast Mutación matemática 160

Hace poco mi hija miraba por la ventana del coche un gran bando de pájaros y me preguntó:

—Papá, ¿cómo saben adónde van?

Como suele pasar con sus preguntas, no tenía una buena respuesta, así que improvisé:

—Son pájaros, nacen sabiendo.

Ella frunció el ceño, dándose cuenta de que no era precisamente una respuesta brillante. Por suerte, su corta atención me salvó. Pero, cosas del destino, esa misma semana empecé a leer un libro muy entretenido llamado The Perfect Swarm de Len Fisher, que describe muchos tipos de algoritmos e inteligencias colectivas, incluidas las sencillas reglas que usan muchos animales para mantener su posición en un grupo. La clave está en reconocer que no hace falta ninguna planificación maestra para que los pájaros formen un bando: el bando emerge de un pequeño conjunto de reglas locales que sigue cada ave.

Una demostración clásica de cómo simples reglas individuales pueden generar un comportamiento grupal es la simulación informática conocida como Boids, creada por Craig Reynolds en 1986. Él hizo una animación con un grupo de pájaros triangulares (recuerda: era 1986, hay que perdonarle la forma de los pájaros) que volaban por la pantalla en un bando realista. Pero en lugar de programar un complejo plan central para las trayectorias de todos los boids, les dio solo tres reglas básicas: Separación, Alineamiento y Cohesión. La regla de Separación exigía que cada boid mantuviera distancia prudente de sus vecinos para no amontonarse. La de Alineamiento, que dirigiera su vuelo en la dirección media de sus vecinos cercanos. Y la de Cohesión, que se acercara a la posición media de sus vecinos.

Sorprendentemente, esas reglas básicas bastaban para crear una simulación bastante fiel de bandos y enjambres reales. Y con una regla adicional de evitación de obstáculos, se obtenían efectos chulos, como que el bando se partiera y reagrupase automáticamente al topar con un

árbol. Esta demostración influyente ha servido desde entonces como base para muchas animaciones de enjambres realistas en películas y videojuegos, incluidos los pingüinos en Batman Returns y una banda de alienígenas voladores en Half-Life.

Pero los boids no se limitan al entretenimiento. Los científicos los han usado como punto de partida y han ajustado simulaciones tipo Boids para acercarlas al comportamiento de animales reales, con resultados sorprendentes. Un caso clásico fue el de dos biólogos que querían averiguar cómo los enjambres de abejas se dirigen a las flores recién descubiertas. Seguramente recuerdes vagamente de clase de biología que las abejas bailan para comunicarse. Pero, si lo piensas, el espacio reducido de las colmenas y el enorme número de abejas significa que, en la práctica, solo una pequeñísima proporción del enjambre puede ver el baile y enterarse de la nueva fuente de néctar. Entonces, ¿cómo llega un grupo gigantesco al lugar correcto? Podrías pensar que las exploradoras y las pocas que vieron el baile actúan como líderes y llevan a sus compañeras al sitio, pero te equivocarías.

Tras muchas horas de observación minuciosa, los biólogos descubrieron el secreto: no hay líderes designados y ninguna abeja sabe realmente quién va en la dirección correcta. La mayoría de las abejas se limita a formar parte de un enjambre tipo boids, siguiendo reglas locales para volar junto a sus vecinas. Pero el pequeño número de abejas que sí conoce la dirección, las llamadas streaker bees (abejas velocistas), sesga su vuelo para ir más rápido que la media y en la dirección adecuada. Estas abejas están repartidas por todo el enjambre: pueden estar delante, en medio o atrás. Como van un poco más rápido, terminan alcanzando la parte frontal y luego deben replegarse momentáneamente al interior del enjambre. Pero con la mayoría simplemente siguiendo las reglas básicas para permanecer juntas, basta con unas pocas que saben adónde van: con solo unas cuantas volando rápido y con un rumbo intencionado, todo el grupo acaba en el lugar correcto. Los biólogos confirmaron su hallazgo con una simulación tipo Boids.

En otras palabras, con una gran masa que solo intenta mantenerse con sus vecinas, basta con unas pocas que se mueven con propósito para llevar a todo el enjambre en la dirección adecuada. Algunos han

señalado que esta idea se aplica a otras áreas de la vida. ¿Cuántas veces has estado con un grupo de amigos decidiendo qué pódcast escuchar, y como la mayoría no tenía preferencia fuerte, tu entusiasmo por Mutación matemática se convirtió en consenso grupal? Vale, quizá ese no sea un ejemplo realista, porque quién podría imaginar disenso en ese tema. Pero seguro que puedes ver cómo esto se aplica a los negocios: los visionarios de una empresa pueden "liderar desde dentro" y, si los demás siguen haciendo sus tareas rutinarias por inercia, los pocos que se mueven con propósito pueden dirigir a toda la compañía en una nueva dirección.

Mejor acabo aquí antes de meterme en líos: creo que acabo de darle a mi jefe una excusa para no ascenderme, ya que he demostrado que no necesito que me coloquen artificialmente al frente del bando para liderar al equipo en una nueva dirección.

Una nueva clase de década

Del pódcast Mutación matemática 166

Hace poco, el mastodóntico tomo de Stephen Wolfram A New Kind of Science —abreviado NKS— celebró su décimo aniversario. Normalmente, un título así es una señal clarísima de que el autor es un chiflado, como seguro oirás en cualquiera de los pódcast escépticos que abundan en iTunes. Pero Wolfram es un caso especial: es sin duda un verdadero genio, con contribuciones a la física de partículas desde los 15 años, doctorado por Caltech a los 20, el más joven receptor de la beca "genio" MacArthur a los 21 y desarrollador principal del software Mathematica, que se ha convertido en estándar mundial para las matemáticas computacionales. Por otro lado, ser un genio no impide que alguien se vuelva un poco loco con el tiempo. Así que, como sugiere el título de su libro, ¿ha revolucionado Wolfram realmente la ciencia? ¿O ha hecho un "Linus Pauling" y se ha ido por la tangente?

Primero, revisemos los conceptos básicos de esta Nueva Clase de Ciencia. La idea de NKS se basa en que modelos computacionales muy simples pueden generar complejidad sorprendente. Un ejemplo es el Juego de la Vida de Conway, miembro de la clase de sistemas simples conocidos como autómatas celulares. Este "juego" se juega en una cuadrícula infinita de casillas, cada una viva (negra) o muerta (blanca). En cada turno, cualquier casilla viva con exactamente 2 o 3 vecinas vivas sigue viva; de lo contrario muere de soledad o de hacinamiento. Cualquier casilla muerta sigue muerta, salvo que tenga exactamente 3 vecinas vivas, en cuyo caso se vuelve viva. Y ya está. Pese a la sencillez de estas reglas, puede producir una variedad alucinante de comportamientos según la configuración inicial. En la página de la Wikipedia puedes ver un "cañón de planeadores": una estructura que lanza una serie infinita de "planeadores" hacia el infinito. Incluso se ha demostrado que el Juego de la Vida es computacionalmente universal: puede simular cualquier computadora real con la configuración adecuada de casillas iniciales.

Dado que esta universalidad computacional es posible en un sistema

tan simple, ¿qué otros fenómenos complejos de la vida real pueden modelarse con autómatas celulares u otros sistemas similares? Se han usado para modelar dinámica de fluidos, tráfico, crecimiento de cristales y varias áreas de geología y ecología. Si juegas con el Juego de la Vida el tiempo suficiente, verás configuraciones que parecen literalmente tener vida propia en la forma impredecible en que se comportan: "vida artificial" incluso se ha convertido en un área de estudio aparte. La tesis de Wolfram parece ser que todas las áreas complejas de la ciencia moderna —biología, química, teoría cuántica, relatividad— acabarán revelándose como computaciones en algún sistema tipo autómata celular. Pero como es muy difícil deducir las leyes observando solo el sistema, deberíamos crear una nueva disciplina científica que examine sistemáticamente clases de sistemas computacionales simples, como los autómatas celulares, y las computaciones que pueden realizar. Estudiar estas computaciones nos llevará a descubrir los principios subyacentes en el núcleo de las demás ciencias: así, si Wolfram tiene razón, NKS es realmente una nueva clase de ciencia.

Entonces, diez años después, ¿revolucionó Wolfram la ciencia? Wolfram parece pensar que sí: en su entrada de blog del aniversario señala que "ahora hay un promedio de un artículo al día citando el libro NKS" y enumera modelos creados para áreas tan diversas como color de pelo en ratones, agrupación de glóbulos rojos, patrones de apéndices de gusanos (sí, yo también me pregunto por ese), sistemas de compraventa financiera y formas de galaxias. También señala que han aparecido artículos sobre casi todos los que él caracteriza como los 256 autómatas celulares más simples, mostrando que al menos algunos han tomado en serio su sugerencia de estudiar estos sistemas simples. Como los artículos de revista reflejan hasta cierto punto el esfuerzo real de la ciencia, parece justo decir que NKS ha influido en una cantidad no trivial de investigación.

Por otro lado, algunos argumentan que NKS no es realmente una nueva ciencia, sino una progresión lógica de la ciencia en general. Los científicos siempre han buscado modelos simples de fenómenos reales: en cierto sentido, esa es la esencia misma de la indagación científica. Wolfram y otros investigadores de autómatas celulares han señalado

puntos importantes, que los modelos simples pueden dar lugar a fenómenos aparentemente mucho más complejos de lo que uno esperaría. Pero ¿es cierto que los científicos en las variadas áreas que Wolfram cita no habrían encontrado sus modelos simples sin NKS? Y aunque los modelos basados en autómatas celulares han tenido éxito en numerosos nichos, creo que aún estamos esperando la descripción de alguna gran área general de la ciencia, como la física de partículas o la relatividad, en términos de un modelo tan simple. Si hubiera tenido lugar un éxito así, creo que estaría en las portadas de la divulgación científica y, por lo que veo, casi todos los impactos de NKS que Wolfram cita están limitados a artículos académicos. Sin desmerecer los artículos de revista, parte estándar del proceso científico, pero cuando afirmas estar revolucionando la ciencia, creo que el listón está un poco más alto. Tampoco podemos olvidar que muchos científicos pueden haberse sentido obligados a mencionar NKS en cualquier discusión vagamente relacionada con autómatas celulares, por su estatus de tomo masivo y famoso sobre el tema: un colega me confesó que ese fue su caso al citar NKS, aunque su artículo habría sido prácticamente idéntico sin haber oído hablar del libro de Wolfram.

Así que, ¿creó Stephen Wolfram realmente una Nueva Clase de Ciencia o se dejó hipnotizar por las animaciones chulas de autómatas celulares en su pantalla y presentó los conceptos como mucho más grandiosos de lo que merecen? Parece que el jurado sigue deliberando: suponiendo que su análisis bibliográfico sea correcto, creo que es seguro decir que muchos científicos, ingenieros y matemáticos se toman en serio sus ideas, aunque todavía no hemos visto los avances revolucionarios prometidos por su título. Pero si alguien merece el beneficio de la duda pese a escoger un título que activa todos los detectores de chiflados del mundo escéptico, ese es Stephen Wolfram.

Bichos básicos

Del pódcast Mutación matemática 167

Tras publicar el episodio del pódcast mencionado en la sección anterior, un oyente —Andrew, de Suiza— me envió un correo con un enlace fascinante. Era un artículo sobre los "vehículos de Braitenburg", un conjunto de vehículos simples y abstractos definidos en 1986 por el investigador en psicología y cibernética Valentino Braitenburg, que muestran cómo diseños robóticos muy sencillos pueden dar lugar a aparente inteligencia y emociones… al menos a ojos de un observador ingenuo. Aunque los robots pueden construirse físicamente —y de hecho hay varios ejemplos y simulaciones en los enlaces que encontrarás en las notas del episodio—, Braitenburg los concebía sobre todo como experimentos mentales para entender mejor los fundamentos de la psicología. Como él mismo dice en su libro: "Acostúmbrate a pensar de un modo en el que el hardware que materializa una idea sea mucho menos importante que la idea en sí".

El vehículo de Braitenburg más simple se puede imaginar como un cochecito de juguete, con motores para las ruedas izquierda y derecha y sensores básicos en los lados izquierdo y derecho del frontal para detectar niveles de algún elemento del entorno (luz, temperatura…) y accionar los motores en consecuencia. El más sencillo de todos puede pensarse como uno que solo tiene sensores de temperatura conectados conjuntamente a ambas ruedas: se mueve rápido en zona caliente y se ralentiza o se para en zona fría. Si vieras uno de estos cacharros en la naturaleza, ¿te darías cuenta de lo simple que es su diseño o le atribuirías un deseo consciente de salir del sol y refrescarse? Aquí tienes la respuesta de Braitenburg:

"Imagina ahora lo que pensarías si vieras uno de estos vehículos nadando en un estanque. 'Es inquieto', dirías, 'no le gusta el agua caliente'. Pero es bastante estúpido, ya que no es capaz de volver al agradable lugar frío que dejó atrás en su agitación. En cualquier caso, dirías: 'Está VIVO', ya que nunca has visto una partícula de materia muerta moverse de esa manera".

Puede que Braitenburg estire un poco el argumento, pero no creo que su análisis sea descabellado, sobre todo si te imaginas el vehículo disfrazado de insecto en lugar de robot.

Cuando haces los vehículos un poco más complejos, parece que simulan insectos con acciones y emociones algo más elaboradas. Por ejemplo, piensa en el caso en que las ruedas izquierda y derecha funcionan de forma independiente, con cada sensor conectado a la rueda del mismo lado. Si el vehículo detecta calor en un lado, esa rueda girará más rápido y se apartará; parecerá que teme el calor, como en nuestro ejemplo original, pero huyendo de formas más interesantes gracias al movimiento curvado que producen las ruedas independientes. Si cada sensor se conecta a la rueda contraria, sin embargo, obtendremos un comportamiento muy distinto: el vehículo se dirigirá hacia la fuente de calor, embistiéndola si puede. Así, nuestros vehículos parecerán animales que muestran actitudes de miedo o agresión.

La siguiente variante que propone Braitenburg es invertir el signo de la influencia de los sensores, de modo que en vez de acelerar las ruedas, activarlos las hace ralentizarse. Ahora veamos las dos variantes anteriores, con cada sensor actuando sobre la rueda del mismo lado o del contrario. Si es del mismo lado, el vehículo terminará deteniéndose de frente a la fuente de calor, porque la rueda del lado opuesto girará más rápido que la del lado de la fuente. Si es del lado contrario, el vehículo acabará parándose de espaldas a la fuente, por razones similares, y será más vulnerable a reiniciarse ante la aparición de fuentes remotas.

Podrías pensar en el primer vehículo como un Amante, que quiere estar cerca de la fuente de calor, y en el segundo como un Explorador, al que le gusta la fuente pero está listo para apartarse en busca de otras oportunidades.

Es divertido imaginar qué otras ligeras variantes pueden simular diferentes emociones primitivas. Braitenburg escribió un libro entero sobre el tema, añadiendo giros como múltiples sensores o “sensores umbral” que actúan de manera discontinua al alcanzarse ciertos valores en el entorno, construyendo gradualmente redes neuronales primitivas y elementos que parecen conducir a ordenadores básicos. De ahí surgen

ilusiones de intención, afinidades y aversiones, memoria y otros comportamientos aparentemente superiores de los animales. Incluso llega a tratar cómo podría usarse la evolución darwiniana para crear vehículos aún más avanzados.

La complejidad que resulta de estos vehículos simples es muy distinta de la de los autómatas celulares de la sección anterior. Al venir del campo de la psicología más que de la teoría de autómatas, están descritos de manera mucho menos precisa. No se limitan a un conjunto tan simple de operaciones como un autómata celular típico y parecen abiertos a incorporar elementos de cómputo arbitrariamente complejos. Aun así, incluso antes de añadir grandes complejidades, es sorprendente lo fácil que resulta imitar ciertos patrones de comportamiento real que vemos en los animales de la naturaleza, simplemente uniendo unos cuantos componentes mecánicos tontos de forma obvia. Tanto los vehículos de Braitenburg como los autómatas celulares pueden verse también como aportaciones básicas a esa disciplina fronteriza conocida como Vida Artificial: el estudio serio de sistemas artificiales con apariencia de vida como base real para generar formas de vida no biológicas.

Así que la próxima vez que te sientas frustrado o culpable por aplastar una cucaracha que corretea por tu cocina, recuerda que su comportamiento bien podría representarse por un vehículo trivial de Braitenburg, y que quizá no sea un genio maligno conspirando para destruir tu cocina, sino una simple máquina biológica tonta.

Matemáticas que pican

Del pódcast Mutación matemática 179

Desde primero de primaria, a mi hija le encanta jugar con insectos y otros bichos que encuentra fuera. Yo intento fomentar cualquier interés científico, aunque he tenido que darle charlas severas para que no lleve su afición a casa. Por eso vemos juntos muchos programas de Animal Planet. Recientemente, uno mencionaba a las cigarras de 17 años, un tipo de insecto cuyas larvas emergen del suelo como adultas cada 17 años. Pero, como se preguntó mi hija en voz alta, ¿cómo se les ocurrió el número 17? ¿Por qué un insecto elegiría ese número en particular?

Unas búsquedas en la web me dieron varias respuestas. Pero, para empezar, tenemos que aclarar qué estamos preguntando. Diecisiete años es un ciclo vital interesante por más de un motivo. Por un lado, es bastante largo: ¿qué ventaja puede sacar un insecto de pasar tanto tiempo entre generaciones? Luego, como buen fan de pódcast matemáticos, seguro que has notado otro aspecto interesante del 17: es un número primo, divisible solo por sí mismo y por 1. ¿Se benefician las cigarras tanto del ciclo largo como de la "primicidad"?

Según una teoría, las generaciones largas son útiles cuando el clima cambia rápidamente. Las cigarras periódicas evolucionaron hace unos 1,8 millones de años, en un momento de inestabilidad climática. En esas situaciones podía haber varios años seguidos de temperaturas hostiles, demasiado cálidas o demasiado frías. Puedes imaginar que, si los años malos vienen en racimos, esperar un tiempo para volver tras un año en el que apenas sobrevives puede darte ventaja y evitar que una "tormenta de polvo" evolutiva acabe con tu especie. Claro que, según los patrones reales de temperatura, el ciclo largo podría ser bueno o malo, pero un estudio de modelización enlazado en las notas del episodio mostraba que, en el clima de aquella época, una cigarra de 17 años tendría un 96% de probabilidad de que sus descendientes sobrevivieran 1500 años, mientras que una variedad de 7 años solo tendría un 8%. Eso suponiendo que la principal amenaza es el clima y sin contar depredadores hambrientos ni niños de seis años buscando

mascota.

El hecho de que su periodo sea primo es otra adaptación interesante. La teoría más popular, propuesta originalmente por el famoso biólogo Stephen Jay Gould, está relacionada con el método llamado "saciedad del depredador". Es una forma elegante de decir que simplemente se reproducen en enjambres tan enormes que los depredadores pueden comer todo lo que quieran y aún quedan suficientes supervivientes para propagar la especie. Pero hay un problema fundamental con esta estrategia: los depredadores podrían aprender a aumentar periódicamente su propia población en previsión de este banquete. Si el periodo fuera un número pequeño y predecible, no sería difícil que algún depredador evolucionara por azar un ciclo que coincidiera. Pero con el número primo 17, las probabilidades de que un depredador evolucione por mutación aleatoria para aumentar su población con la periodicidad correcta son mínimas.

Otra explicación, quizá complementaria, viene de la versión cigarra de la segregación racial: las subespecies que permanecen más distintas son las menos propensas a cruzarse. Por ejemplo, una especie de 13 años y otra de 17 años solo coincidirían como mucho cada 13 × 17 = 221 años, de modo que las oportunidades de apareamiento serían raras y las dos líneas genéticas tendrían más posibilidades de permanecer separadas. Parece haber un fallo básico en esta explicación si lo piensas un poco: un periodo de 17 años parece un método excesivamente complejo para mantener especies separadas. Bastaría con que un par de especies tuvieran, por ejemplo, ciclos de 2 años pero emergieran con un desfase de 1 año, y nunca se encontrarían. Sin embargo, si hay gran cantidad de grupos de cigarras con periodos aleatorios y competidores, podría ocurrir que, entre todos ellos, las de ciclo largo y primo tengan la ventaja de seguir siendo especies distintas. Las de ciclos pequeños y no primos se encontrarían mucho más a menudo y probablemente se mezclarían hasta fundirse en una sola.

Como en muchos aspectos de la ciencia evolutiva, es difícil averiguar empíricamente si una o todas estas explicaciones son correctas. Pero hay muchos enlaces en la web que describen modelos computacionales que respaldan una o varias de estas hipótesis. Quizá algún día encuentres una respuesta aún mejor. Yo, personalmente, me conformo

con que no terminen en mi cocina.

Viajes por el espacio animal

Del pódcast Mutación matemática 194

Hace poco estaba en el zoo de Oregón con mi hija, y vimos un montón de animales —unos adorables y otros no tanto—: una tortuga, lagartos, tigres, nutrias marinas y un chimpancé. Siempre me ha asombrado que en nuestro planeta pueda haber evolucionado semejante variedad de criaturas, y que a través de distintas mutaciones unas formas primordiales hayan dado lugar a todos estos seres tan diversos y disímiles. Durante mucho tiempo me costó entenderlo, hasta que leí el famoso libro El relato del antepasado de Richard Dawkins. En uno de sus capítulos describe la evolución como un gran viaje matemático a través de un tipo especial de espacio multidimensional. De algún modo, esa visión geométrica de la evolución me hizo verla más real y más sensata que nunca, así que pensé en compartirla contigo.

¿Qué queremos decir con un viaje por un espacio geométrico? Empecemos hablando de un viaje por un espacio tridimensional ordinario. Piensa en un gráfico 3-D que podrías hacer en una herramienta como Excel, mostrando tu posición en la casa en términos de largo, ancho y alto con respecto a la puerta principal. Un punto en las coordenadas (0,0,0) indicaría que estás en la puerta de entrada, mientras que (10,10,10) podría mostrar que estás en tu cuarto de ordenador, un poco más lejos, en la segunda planta. Si preguntas: ¿es posible ir de la puerta al cuarto del ordenador?, la respuesta es sí si puedes dibujar un camino continuo en tu gráfico desde (0,0,0) hasta (10,10,10) en el que cada punto del trayecto sea físicamente alcanzable. Si tu cuarto de ordenador fuera inaccesible —pongamos que tu esposa lo encierra en muros de acero para impedirte jugar a tantos videojuegos—, eso se representaría con regiones negras infranqueables en tu gráfico, que impedirían dibujar un camino continuo.

Ahora veamos cómo modelar la evolución animal como un gráfico. Piensa en varias características de los animales, como pelaje, tamaño y fuerza. Podrías trazar puntos en un gráfico 3-D que mostrara dónde caen ciertos animales similares en esas dimensiones. Quizá tu gato

doméstico esté cerca del origen del gráfico, mientras que un tigre siberiano aparezca en un punto más alejado. Preguntémonos: ¿podemos viajar por un camino continuo —donde el movimiento se debe a mutaciones genéticas que generan un ser vivo ligeramente distinto en una de nuestras tres dimensiones— desde el punto del gato al del tigre? Es fácil imaginar mutaciones que hagan a un animal un poco más grande, fuerte o peludo. Nadie propondría seriamente que haya una región negra entre el gato y el tigre donde, pasado cierto tamaño, sea imposible que exista un ser con esa especificación. Así que podemos imaginar sin problemas que el gato y el tigre están emparentados.

Mirar solo tres dimensiones es, evidentemente, una simplificación enorme, porque hay miles de dimensiones para describir a un animal: tipo de dieta, vista, oído y muchas otras cosas que ni se te ocurrirán si no eres veterinario o biólogo profesional. Pero la idea central sigue en pie: cualquier animal puede verse como un punto en un gran gráfico multidimensional. Los gráficos con más de tres dimensiones se pueden modelar fácilmente con sistemas informáticos modernos, aunque no podamos ver físicamente más de tres en una sola figura. Si quieres saber si un animal puede tener relación evolutiva con otro, basta con preguntarte: ¿puedes concebir un camino continuo de uno al otro en ese espacio gigantesco? No importa si el camino es larguísimo: la evolución tiene millones de años de margen.

Lo más complicado es que hay muchas regiones negras en ese gráfico, que representan monstruos inviables: por ejemplo, el punto con el tamaño de un gato y la mordida de un tigre probablemente nunca podrá alcanzarse, aunque si intentas acariciar a mi gato Manny mientras se lava quizá te acerques bastante. Como dice Dawkins: “En el paisaje multidimensional de todos los animales posibles, las criaturas vivas son islas de viabilidad separadas de otras islas por gigantescos océanos de deformidad grotesca. Partiendo de cualquier isla, puedes evolucionar paso a paso, aquí sacando una pata, allí limando la punta de un cuerno, o oscureciendo una pluma.” Así que las islas que Dawkins describe en su gráfico pueden pensarse conectadas por gruesos bancos de arena, mostrando caminos de una a otra donde las criaturas intermedias son razonables. El viaje de un T-Rex a una gallina puede

parecer increíble, pero no me cuesta imaginar una serie muy larga de cambios continuos que trace ese recorrido en este extraño espacio: reducción del tamaño, transformación gradual de los brazos en alas, endurecimiento de los dientes en pico, etc.

Hay un detalle más de este espacio que hace que la evolución sea un poco más creíble de lo que parece al principio. Hemos estado hablando de caminos continuos, pero eso es una simplificación. Cada cambio genético es en realidad un pequeño "salto" discreto de un punto a otro, así que los caminos no tienen que ser completamente continuos. Por ejemplo, el salto de ceguera total a manchas sensibles a la luz, luego a manchas con líquido y así hasta un ojo completo puede parecer tener muchas discontinuidades, pero no pasa nada mientras ninguna sea tan grande que no se pueda salvar con una mutación genética pequeña. En otras palabras, algunas regiones negras del gráfico pueden no ser insalvables. Claro que hay discontinuidades imposibles de saltar: un ave con un sistema de propulsión a chorro de petróleo quizá se pueda "trazar" en el gráfico, pero requeriría tantos cambios de golpe que es prácticamente imposible. Las regiones negras entre nuestro superpájaro y la gallina son seguramente demasiado gruesas para permitir un salto evolutivo.

En fin, quizá esto solo ayude a los frikis de las mates, pero la explicación espacial de Dawkins me resultó una forma muy intuitiva de pensar en la evolución. La próxima vez que juegues con tu perro o tu gato, recuerda que no es solo una mascota: es un punto único en un espacio multidimensional gigantesco.

Un montón de gaviotas

Del pódcast Mutación matemática 201

La paradoja del montón, conocida por los intelectuales más estirados como la Paradoja Sorites (Sorites significa "montón" en griego), va así. Todos estamos de acuerdo en que podemos reconocer un montón de arena: si vemos uno, miramos el montón y decimos "¡eso es un montón!". Todos estamos de acuerdo en que quitar un grano de arena a un montón no lo convierte en un no-montón, así que podemos quitar un grano sabiendo que sigue siendo un montón. Pero si seguimos haciéndolo miles de veces, al final nos quedamos con un solo grano. ¿Eso es un montón?

Creo que coincidiremos en que no. Pero ¿cómo pasamos de tener un montón a no tenerlo, si cada paso consistía en una operación que preservaba la "montoneidad"?

Una razón de que esta paradoja sea tan interesante es que se aplica a muchas situaciones reales. Podemos idear un caso parecido para describir a una persona alta, y restarle pulgadas continuamente. Restar una sola pulgada no la haría "no alta", ¿verdad? Pero si lo repetimos, en algún momento tendrá que volverse baja, antes de desaparecer por completo. Del mismo modo, podemos quitarle un dólar a Bill Gates sin poner en peligro su condición de "rico", pero debe de existir un punto en que, si bastante gente (probablemente abogados antimonopolio) se lo quita suficientes veces, dejará de ser rico. Podemos hacer lo mismo con casi cualquier adjetivo cuyas fronteras de definición sean ambiguas.

Sorprendentemente, la idea de definir claramente las especies animales también está sujeta a esta paradoja, como ha señalado Richard Dawkins. Tendemos a pensar en las especies como entidades discretas y claramente separadas, pero no es así. El mejor ejemplo del reino animal quizá sea el concepto de "especies en anillo". Se trata de especies que consisten en varias poblaciones vecinas formando un anillo. En un punto del anillo hay dos especies aparentemente distintas. Pero si empiezas por una de ellas, puede cruzarse con su vecina de la derecha, y esa vecina con la siguiente, y así sucesivamente hasta

completar el círculo, formando un conjunto continuo de parejas reproductoras entre las dos especies distintas.

Por ejemplo, en Gran Bretaña hay dos especies de gaviotas argénteas, la europea y la de dorso negro menor, que no se cruzan. Pero la gaviota argéntea europea puede cruzarse con la gaviota argéntea americana hacia el oeste, que puede cruzarse con la gaviota argéntea de Siberia Oriental, cuyos miembros occidentales pueden cruzarse con la gaviota de Heuglin, que puede cruzarse con la de dorso negro menor, aparentemente distinta de la europea con la que empezamos. Entonces, ¿estamos hablando de varias especies distintas de gaviotas, o de un enorme montón de gaviotas de una sola especie? Es una paradoja.

Volviendo al concepto de montón, hay varias resoluciones clásicas al dilema. La más obvia es fijar un límite arbitrario: por ejemplo, 500 granos de arena o más es un montón y cualquier cantidad menor es un no-montón. Esto resulta poco satisfactorio. Una versión más compleja mencionada en la Wikipedia es la "histéresis", que permite una variación asimétrica en la definición, un poco como funciona el aire acondicionado de tu casa. Al restar granos, puede perder su condición de montón en un umbral como 500. Pero al añadir, no la recupera hasta llegar a 700. No estoy convencido de que esto aporte mucho filosóficamente, salvo que tu compañía eléctrica te facture cada vez que redefinas tu montón.

Un método mejor es usar lógica multivaluada, donde decimos que cualquier pila tiene cierto grado de "montoneidad" que varía continuamente: por encima de cierto umbral es 100%, y a medida que reducimos el tamaño, el porcentaje va bajando hasta llegar a 0 con un solo grano. Una variante es decir que hay que encuestar a todos los observadores y promediar su juicio sobre si es o no un montón para decidir si tu pila merece la definición.

Si eres más cínico, está el enfoque nihilista, que consiste en deshacer la pregunta: declarar simplemente fuera de juego cualquier concepto que no esté bien definido con límites claros. Así diríamos que el verdadero problema es el uso de la palabra "montón", que no es lo bastante precisa para admitir discusión filosófica. También hay un par de resoluciones filosóficas más elaboradas en fuentes en línea, que a mí me resultan un poco técnicas.

En última instancia, esta paradoja pone de relieve el problema de vivir en un mundo en el que nos gusta que las cosas tengan definiciones discretas, con propiedades que se tienen o no se tienen. Casi siempre hay matices, y nuestros puntos discretos y limpios pueden estar conectados por un camino continuo de incrementos, y no ser tan distintos como creemos.

CAPÍTULO 12

Paradojas desconcertantes

Las paradojas —enunciados que parecen ser a la vez verdaderos y falsos, o de algún otro modo autocontradictorios— han sido siempre un tema favorito entre los frikis de las matemáticas. Parecen señalar casos en los que nuestro deseo de lógica hermética y precisión matemática se estrella contra un muro de ladrillo. A menudo muestran algún tipo de limitación, antes malentendida, en las estructuras lógicas que hemos estado construyendo, o alguna desconexión fundamental entre nuestros lenguajes humanos y las matemáticas subyacentes.

También hay casos que parecen paradojas al principio debido a las limitaciones de nuestra intuición o de nuestra descripción lingüística, pero que en realidad son perfectamente coherentes cuando se entienden bien. Yo meto algunas de estas en el mismo saco, ya que requieren estirar la mente de formas similares para poder salir del hoyo "paradójico" ilusorio.

Puedes cruzar la calle

Del pódcast Mutación matemática 94

Seguro que has oído hablar de la paradoja de Zenón, un problema clásico descrito por el filósofo griego Zenón de Elea hacia el 490-430 a.C. Más exactamente, describió una serie de paradojas, pero aquí hablaremos de la más conocida, a veces llamada la paradoja de la dicotomía. Es equivalente a lo siguiente: Supongamos que quieres cruzar la calle. Antes de llegar del todo al otro lado, tienes que llegar a la mitad. Pero antes de llegar a la mitad, tienes que llegar a 1/4 del camino. Y antes de llegar a 1/4, tienes que llegar a 1/8. Y así sucesivamente. Como tienes que hacer un número infinito de cosas antes de avanzar cualquier distancia, es imposible llegar a ninguna parte. Por tanto, todo movimiento es una ilusión.

En realidad, para mí, incluso si tomas la paradoja al pie de la letra, la

conclusión de que todo movimiento es una ilusión no me parece que resuelva el problema. Al fin y al cabo, supongamos que quieres imaginarte cruzando una calle, ya que te has resignado a que el movimiento real es imposible. Antes de imaginarte llegando del todo al otro lado, debes imaginarte llegando hasta la mitad. Y antes de imaginarte llegando a la mitad, debes imaginarte llegando a un cuarto. Y así sucesivamente. Así que, incluso en tu imaginación, es una paradoja, y un cruce imaginario de la calle tampoco puede existir. Supongo que si pudiéramos imaginarnos teletransportándonos al otro lado, eso evitaría el problema, pero estoy bastante seguro de que puedo imaginarme cruzando una calle sin teletransportación. Claro que quizá solo estoy imaginando que puedo imaginarlo.

Otra interpretación de los antiguos fue que la paradoja demuestra que el espacio no es infinitamente divisible. Si en algún punto ya no puedes tomar la mitad de la distancia restante, no hay paradoja. Sin embargo, hay dificultades con esta solución: incluso si hay un tamaño por debajo del cual no existen objetos físicos, ¿no es cierto que puedes describir distancias más pequeñas que eso, ya que nada te impide dividir por la mitad un número arbitrariamente pequeño? Y entonces tienes que recorrer esas distancias para moverte. Si además suponemos que el movimiento continuo no existe y que por debajo de cierta distancia siempre nos movemos mediante microteletransportaciones que no notamos, supongo que eso sí resolvería la cuestión. De hecho, esa interpretación podría ser coherente con la física cuántica moderna. Pero hay mejores formas de resolver la paradoja y seguir permitiendo el movimiento continuo.

Ya en el siglo III a. C. Aristóteles había observado que la secuencia de distancias decrecientes también viene acompañada de una secuencia de tiempos decrecientes. Así, si tardas un minuto en cruzar la calle, deberías tardar 1/2 minuto en llegar a la mitad, o 1/4 en llegar a un cuarto, etc., de modo que aunque tengas que hacer esas infinitas cosas, empiezan a requerir cantidades infinitesimales de tiempo a medida que se hacen más pequeñas. Mientras la distancia total que necesitas cubrir es 1/2 + 1/4 + 1/8 + … hasta el infinito, el tiempo total viene dado por la misma serie. Si cada una de las infinitas distancias te llevara un minuto entero, entonces sí habría paradoja: tardarías un tiempo infinito

en sumar los infinitos términos y recorrer cualquier distancia. Pero como el número infinito de distancias infinitesimales se cubre usando un número infinito de tiempos infinitesimales, mientras estas series infinitas tengan suma finita, recorres una cantidad finita de espacio en un tiempo finito, y no hay paradoja.

Por cierto, recuerda que la serie infinita 1/2 + 1/4 + 1/8 + … sí tiene una suma finita. Para demostrarlo, llamemos S a la suma de la serie. Si escribimos S = 1/2 + 1/4 + 1/8 + … y multiplicamos ambos lados por 2, obtenemos 2S = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + … Pero el lado derecho de esa ecuación es solo 1 + S, ya que todo menos el 1 inicial forma la serie con la que empezamos. Y si 2S = 1 + S, entonces S = 1, y ahí está nuestra suma finita. Este tipo de resultados ya eran conocidos por Arquímedes en el siglo II a. C.

Ahora bien, algunos filósofos dirán que esta refutación matemática basada en sumar series infinitas es demasiado simplona, y que en realidad toda la base de permitir procesos infinitos en álgebra y cálculo es problemática. Pero creo que el cálculo ha funcionado en suficientes contextos reales como para no preocuparme demasiado. Quizá deberías escuchar un pódcast de filosofía si todavía te cuesta imaginar que puedes cruzar una calle. Pero, como tu mano nunca podrá llegar del todo al teclado para suscribirte a ese otro pódcast sin sumar una serie infinita, eso podría ser todo un reto.

Naves griegas en cuatro dimensiones

Del pódcast Mutación matemática 197

Hoy vamos a hablar de la famosa paradoja del barco de Teseo. Esta paradoja, conocida al menos desde la época de Sócrates, implica el barco en el que el héroe Teseo navegó de Creta a Atenas. Cuando el barco regresó, los carpinteros navales locales se dieron cuenta de que una de sus tablas empezaba a pudrirse, así que la sustituyeron. Como el barco era tan famoso, en lugar de desecharlo al envejecer, continuaron a lo largo de los años reemplazando cualquier tablón roto o en descomposición por uno nuevo. Al final, el 100% de la madera del barco había sido reemplazada: no quedaba ni una sola tabla presente en el viaje original desde Creta. En ese momento, ¿seguía siendo este el mismo barco del viaje de Teseo, o debía considerarse un barco nuevo construido en el puerto de Atenas? Muchos años después, Thomas Hobbes hizo esta paradoja aún más confusa al añadir una cuestión más: supongamos que alguien hubiera recogido cuidadosamente los tablones retirados y los hubiera usado para construir un segundo barco completo, aunque no muy resistente. ¿Tendría este nuevo barco mejor derecho a ser el verdadero barco de Teseo?

Esta paradoja se ha descrito con varias variantes a lo largo de los años. Durante la Ilustración John Locke planteó esencialmente la misma paradoja a partir de zurcir un calcetín. Jules Verne ideó una versión ingeniosa en la que un anciano tomaba una esposa mucho más joven, que tras enviudar muchos años después tomaba un marido mucho más joven, y el patrón se repetía durante cientos de años. ¿Era este "el mismo" matrimonio siglos después? En tiempos modernos, probablemente te encuentres más con esta paradoja en términos de grupos de rock, que parecen estar en un estado perpetuo de guerra por el nombre del grupo tras la marcha de miembros originales. Durante muchos años me decepcionó que el último álbum de la Velvet Underground, Squeeze, estuviera descatalogado; la mayoría de los fans lo consideraban que no era un verdadero álbum de VU, ya que para entonces no quedaba ningún miembro original, pero yo seguía con

curiosidad. Al final iTunes puso ese álbum a la venta, y tras escucharlo una vez, tengo que ponerme del lado de que el barco en el puerto de Atenas debería haber sido quemado para leña.

Pero más seriamente, ¿cómo resolvemos esta paradoja? Después de que todos los tablones han sido reemplazados, ¿es el barco de Teseo el hecho con los tablones nuevos, el construido con los viejos, o ninguno? La solución más satisfactoria que he oído se basa en el concepto de "cuatridimensionalismo". La idea aquí es que nuestro problema surge de la definición ingenua del barco de Teseo como un objeto en algún punto del espacio tridimensional. Necesitamos pensar en el barco de Teseo como la unión de un conjunto continuo de objetos en el espacio-tiempo cuatridimensional, teniendo en cuenta no solo las tres dimensiones del objeto físico sino también los puntos en la cuarta dimensión del tiempo. Cada "rebanada" del barco de Teseo consiste en un barco tridimensional en un momento concreto, y el barco de Teseo es la unión de todas esas rebanadas.

Desde esta perspectiva, el barco de Teseo consiste en el barco original el día que regresó al puerto, más el barco en ese puerto con una tabla reemplazada una semana después, y así sucesivamente. Tenemos que ser claros sobre qué estamos definiendo como barco de Teseo en cada momento. Así, sustituir gradualmente los tablones no convierte al barco en otro distinto, ya que hemos definido el barco de Teseo como el que se repara continuamente durante un intervalo en el espacio-tiempo cuatridimensional. Obsérvese que también es posible definir el barco de Teseo como la suma de los tablones originales en cada momento dado. Con esta definición alternativa pero igualmente válida, el "barco" de Teseo empezará como el barco original a su regreso de Creta, pero luego en muchos momentos futuros consistirá en un barco parcial más un montón de madera en algún vertedero, hasta que Hobbes complete su duplicado.

Por supuesto, hay maneras más simples de resolver la paradoja. Uno podría argumentar que el verdadero problema es simplemente la definición vaga y confusa de qué es el barco de Teseo, que la paradoja asume como noción implícita pero nunca enuncia claramente. (Me pregunto si las técnicas de "E-prime" comentadas en capítulos anteriores, donde se evita la palabra "ser" en favor de verbos más

específicos, podrían haber ayudado aquí.) Si hubiéramos definido claramente el barco desde el principio —en términos de sus tablones, su título de propiedad, su capitán o algo más tangible—, nunca habríamos llegado a una paradoja aparente. Una buena metáfora podría venir de algunas leyes estadounidenses de control de armas, donde un componente llamado "receptor inferior" se considera que contiene la identidad del arma de fuego, y legalmente es la misma arma mientras se reemplace cualquier otra pieza, aunque se convierte en otra distinta si cambias ese receptor.

En fin, la próxima vez que lleves tu coche al mecánico local y te cambien un neumático o el filtro de aire, piensa en si Teseo te dejaría decirle a tu pareja que has traído a casa un coche nuevo.

Una sorpresa navideña

Del pódcast Mutación matemática 139

Supón que te digo que tengo una sorpresa navideña para ti: voy a publicar un episodio especial de Mutación matemática alguna mañana de la semana que viene, pero no sabrás con antelación cuándo. Como buen friki de las matemáticas, empiezas a razonar lógicamente.

Imagina que el episodio sale el sábado. Para el viernes ya sabrías que el único día que queda de la semana es el sábado, así que ya sabrías de antemano que el pódcast se publicará ese día, contradiciendo mi promesa original de que sería una sorpresa. Una vez eliminas el sábado, ¿qué otros días pueden quedar? Pues ahora sabes que tampoco puede ser el viernes, porque si el pódcast no llegó el jueves, sabrías que tendría que salir el viernes, dado que ya sabes que no es el sábado. Si de verdad debe ser una sorpresa, tampoco puede ser el viernes. Siguiendo una cadena similar de inducción lógica, vemos que ¡no podría ocurrir ningún día de la semana! Y entonces, cuando en realidad publico el pódcast el miércoles, estás realmente sorprendido, tal y como prometí originalmente… lo que parece contradecir tu lógica.

Esta paradoja, conocida comúnmente como la paradoja de la sorpresa o paradoja de la predicción, se dice que se originó durante la Segunda Guerra Mundial, cuando el gobierno sueco anunció por radio que habría un ejercicio de defensa civil durante la semana siguiente, pero que nadie sabría la fecha con antelación. El matemático sueco Lennart Ekbom reconoció esta paradoja inherente al anuncio, y pronto se propagó como la pólvora por la comunidad matemática. Otra de las muchas razones por las que las autoridades civiles a veces consideran a los matemáticos un dolor de muelas. En 1948 la paradoja apareció impresa en una revista británica y, a finales del siglo XX, casi 100 artículos académicos sobre el tema habían aparecido en la literatura de filosofía y matemáticas. Ha habido muchas formulaciones equivalentes, incluida una que involucra a un prisionero a punto de ser ahorcado y otra de Martin Gardner en la que un marido promete un regalo sorpresa a su esposa.

Esta paradoja sí parece ser un problema válido cuando se describe por primera vez, pero no es tan difícil convencerse tras unos minutos de que te han jugado algún truco. Una resolución sencilla es aceptar que en realidad te he dado una afirmación contradictoria al prometerte que nunca podrías saber de antemano el día del pódcast. Si llegas a una contradicción lógica mediante razonamiento deductivo, significa que uno de tus axiomas, probablemente la afirmación que te di, tenía que ser falsa. Así que mis declaraciones no son veraces en primer lugar, y en realidad debes descartarlas y no tienes información útil sobre el momento del pódcast.

Un autor web llamado Uri Geva señala otro aspecto sutil de esta paradoja. En realidad estamos mezclando dos formas de sorpresa aquí: hay sorpresa por falta de conocimiento, cuando simplemente no sabes cuándo sucederá algo, y sorpresa por conocimiento contradictorio, cuando has razonado lógicamente que algo no ocurrirá y luego ocurre. El anuncio del pódcast sorpresa transforma la primera clase de sorpresa en la segunda. ¿Sigue siendo una paradoja? Creo que en esencia esta explicación es equivalente a la resolución anterior, en la que la contradicción lógica ha convertido las dos formas de conocimiento en equivalentes.

Pero para llegar a una resolución más satisfactoria, me parece que la clave está en la definición de "sorpresa" en el contexto de la paradoja. ¿Te estoy prometiendo de verdad que nunca, en ningún momento, tendrás la posibilidad de conocer con antelación el día correcto? ¿O simplemente te estoy prometiendo que hoy todavía no sabes el día del pódcast? Si usamos la primera definición, es probable que haya paradoja. Si usamos la segunda definición, limitándonos a exigir que hoy no sepas el día, entonces el razonamiento paradójico se desmorona.

Dado que la paradoja de la sorpresa ha inspirado tantos artículos académicos, puedes imaginar fácilmente que se ha dicho mucho más sobre ella. Un artículo detallado en American Mathematical Monthly de mi viejo compañero de Princeton, Tim Chow, formula varias versiones de la paradoja en lógica simbólica e incluso, de alguna manera, calcula una distribución de probabilidad exacta para elegir el día maximizando el potencial de sorpresa para una semana de cinco días. Sin embargo, creo que mientras tengas clara tu definición de sorpresa, puedes evitar

una paradoja sin entrar en tanto detalle.

Resolviendo la paradoja del abuelo

Del pódcast Mutación matemática 122

Probablemente hayas oído hablar de la paradoja del abuelo, una prueba lógica clásica de que los viajes en el tiempo hacia atrás son imposibles. Supón que tienes una máquina del tiempo que te permite viajar al pasado. Puedes usarla para volver a cuando tu abuelo era un niño y dispararle. Eso significaría que nunca podrías nacer. Pero si nunca naciste, no existirías para viajar al pasado y matar a tu abuelo… así que tu abuelo estaría bien, y tú nacerías después de todo. Como nuestras únicas conclusiones lógicas son los resultados contradictorios de que naciste y no naciste, nuestras premisas deben de estar mal, y los viajes en el tiempo son imposibles.

La forma más común en que los autores de ciencia ficción han resuelto este problema es usando universos múltiples: si viajas al pasado y alteras los acontecimientos, creas un universo paralelo donde ocurren los eventos distintos. Así, en un universo tu abuelo fue asesinado y en otro no. Pero eso es una forma de hacer trampa: si viajar al pasado te pone en otro universo, entonces en realidad no has viajado al pasado. ¿Podemos resolver esta paradoja de manera que permita viajar en el tiempo dentro de un único universo?

La respuesta es sí. En los años ochenta, el Dr. Igor Novikov desarrolló algo llamado el “principio de autoconsistencia de Novikov”, que establece que si algún evento cambiara el pasado de manera inconsistente, su probabilidad es 0. Así que, simplemente, no podrías disparar a tu abuelo. Podrías intentarlo, pero siempre pasaría algo que lo impidiera. Quizá te diera un infarto mortal un momento antes de apretar el gatillo. O podrías regresar y encontrarte con que tu padre cuenta la triste historia de cómo, cuando tu abuelo era niño, un maníaco del futuro mató a su hermano gemelo menos conocido. O podrías descubrir que, sin querer, dejaste caer tu iPod en el pasado mientras viajabas en el tiempo, y sus inspiradores pódcast matemáticos le dieron a tu abuelo herido las ganas de vivir. Por cierto, quizá recuerdes que el año pasado salió en los periódicos que algunos físicos intentaban usar

este mismo principio de autoconsistencia para explicar por qué el Gran Colisionador de Hadrones estaba plagado de problemas: de algún modo conduciría a inconsistencias en el universo, así que simplemente no era físicamente posible hacerlo funcionar.

Pero ¿cómo puede tener sentido este principio de autoconsistencia en un mundo con libre albedrío? Puede ser útil imaginarlo en términos de un ejemplo bidimensional. Supongamos que estamos en Flatlandia, el universo bidimensional comentado en capítulos anteriores, habitado por un único ser, el Sr. Cuadrado. Piensa en el plano como en una hoja cuadrada de vidrio, con el Sr. Cuadrado siendo un cuadrado grabado que puede moverse por ella. Tomemos el plano tal como existe a la 1:00, luego coloquemos encima el plano a la 1:01, luego a la 1:02, etc. A medida que apilamos los "planos-momento" del Sr. Cuadrado, cada uno una sola lámina de vidrio inmóvil, imagina que estamos construyendo un gran cubo translúcido, creado por todos los planos apilados. Algo así como uno de esos objetos de cristal grabado que ves en las tiendas de recuerdos. Vemos una trayectoria serpenteante grabada en el cubo, mostrando los movimientos del Sr. Cuadrado por el plano. El cuadrado experimenta cada momento sucesivamente, su conciencia moviéndose lentamente hacia arriba por el cubo, pero nosotros lo vemos todo a la vez. Es como un cubo-historia que nos muestra de un vistazo toda la línea de mundo del cuadrado, la historia de todo lo que ha experimentado o experimentará. Los grabados del cubo nunca se mueven desde nuestro punto de vista, porque lo que el Sr. Cuadrado percibe como su dimensión del tiempo se ha traducido en nuestra dimensión de la altura.

Ahora supón que el Sr. Cuadrado tiene una máquina del tiempo en su plano y la usa para viajar atrás, de las 2:00 a la 1:00. Si miramos de cerca nuestro cubo, podemos ver que hay un segundo Sr. Cuadrado cerca de la base, en el plano de la 1:00. Pero, sea cual sea la trayectoria que trace ese segundo Sr. Cuadrado, no puede cambiar su trayectoria original: solo hay un cubo, y estamos viendo la historia del mundo toda a la vez. El Sr. Cuadrado podría pensar que puede viajar atrás en el tiempo y matar a su yo de la 1:00, pero nosotros podemos mirar el cubo y ver que o bien el Cuadrado de la 1:00 siguió vivo o no: todo el cubo-historia es estático, y no cambia desde nuestro punto de vista. Así que,

ocurra lo que ocurra, la historia del Sr. Cuadrado debe desarrollarse de manera autoconsistente: es físicamente imposible que ocurra de otro modo. Del mismo modo, lo que percibimos como tiempo podría ser visto por criaturas externas a nuestro universo como una simple trayectoria estática a través de un pasado y futuro ya determinados, que por su propia naturaleza no pueden cambiarse de forma inconsistente.

Esta solución es un poco inquietante, pues destroza nuestra percepción del libre albedrío. Pero no me eches la culpa: el universo me destinó a escribir este capítulo.

Una decisión de un millón de dólares

Del pódcast Mutación matemática 123

El tema de la sección anterior, sobre cómo resolver la paradoja del abuelo, me hizo pensar en otra paradoja algo relacionada. Esta, conocida como la paradoja de Newcomb, también ha generado toneladas de debates en la comunidad filosófica y pone sobre la mesa cuestiones fundamentales sobre la existencia del libre albedrío. Va así.

Supongamos que tenemos a un Predictor, es decir, un psíquico o persona similar que afirma poder predecir el futuro, y que siempre ha predicho correctamente en el pasado. El Predictor ha colocado dos cajas, la caja A y la caja B, y nos da la opción de tomar el contenido solo de la caja B o de ambas cajas. Si predijo que tomaríamos ambas cajas, ha puesto 1.000 dólares en la caja A y nada en la B. Si predijo que tomaríamos solo la caja B, ha puesto 1.000 dólares en la A y un millón en la B. Es importante notar que el Predictor preparó las cajas de antemano, así que ninguna acción que tomemos ahora puede cambiar su contenido. ¿Deberíamos elegir ambas cajas, o solo la caja B?

Una respuesta obvia proviene de la teoría de la "utilidad esperada". Si tomamos ambas cajas, eso debe significar que el Predictor esperaba que lo hiciéramos y solo obtendremos 1.000 dólares. Si tomamos solo la caja B, el Predictor esperaba eso y nos llevamos el millón. Por supuesto, si de verdad creemos en el Predictor, en realidad no tenemos elección, pero podemos tener la esperanza de ser el tipo de persona con la fuerza de voluntad para tomar solo una caja, en cuyo caso estamos a punto de ser millonarios. Así que, en la medida en que creemos que tenemos libre albedrío, deberíamos tomar la caja B. Caso cerrado.

Otra respuesta obvia proviene de la teoría de la "dominancia". Dado que el dinero ya está en las cajas, estamos en una de dos situaciones: o la caja A tiene mil y la B está vacía, o la caja A tiene mil y la B tiene un millón. En cualquiera de esos casos, abrir ambas cajas nos da 1.000 dólares más que abrir solo la B. Así que, dado que abrir ambas garantiza más dinero que abrir solo una, naturalmente deberíamos tomar ambas cajas. Independientemente de lo que el Predictor pensó

que haríamos, el dinero está en las cajas, así que sería una locura dejar una atrás. Caso cerrado.

Ves por qué esto se considera una paradoja: tenemos argumentos aparentemente irrefutables tanto para tomar solo la B como para tomar ambas cajas. Pero creo que la formulación de la paradoja hace trampa de una manera: nos presentan a un Predictor que conoce el futuro y, al mismo tiempo, nos dicen que podemos elegir libremente entre las cajas. Ambas cosas no pueden ser ciertas. O el conocimiento del futuro del Predictor es imperfecto, o en realidad no tenemos libre albedrío para tomar la decisión. Como partimos de suposiciones contradictorias, no sorprende que lleguemos a conclusiones contradictorias. Y una paradoja no es una paradoja si sus premisas iniciales no pueden ser válidas de forma coherente.

Otra forma de verlo es que sí tenemos libre albedrío, pero también causalidad hacia atrás: podemos elegir libremente, y la elección que hacemos ahora viaja hacia atrás en el tiempo a la mente del Predictor. Pero en este caso, nos enfrentamos a algo similar a la solución de la paradoja del abuelo comentada en la sección anterior: mientras haya una forma para que el universo sea consistente, este tipo de viaje en el tiempo no está descartado. Si ese es el caso, claramente necesitamos elegir la caja B, ya que eso causará que el millón de dólares esté allí. Newcomb descartó específicamente esta solución, ya que la respuesta sería demasiado fácil.

Al reformular esta paradoja de maneras en que el Predictor es ligeramente imperfecto, podemos mirarla de formas nuevas e interesantes. Por ejemplo, supón que te enteras de que en tu familia corren dos genes contradictorios. Uno te convertirá en campeón de fútbol americano y te llevará a multimillonarios contratos en la NFL. El otro te convertirá en el mayor pódcaster matemático del universo de Internet, pero también hará que mueras antes de los 30. Estás entrando en la universidad y debes elegir si especializarte en estudios de fútbol o en matemáticas. Te enfrentas a una elección similar a la paradoja: ¿tiene sentido renunciar a tu sueño de toda la vida de ser pódcaster matemático y conformarte con ser campeón de fútbol sobre la base de que elegir matemáticas hace más probable una muerte temprana? ¿O tiene más sentido razonar que no hay forma de cambiar tus genes, así

que deberías seguir tu corazón? Ojalá nunca tengas que enfrentarte a una decisión tan desgarradora.

La paradoja del pintor

Del pódcast Mutación matemática 55

En capítulos anteriores quizá recuerdes que hablamos de una figura extraña conocida como fractal que tiene un perímetro infinito pero un área finita. Pero en una discusión reciente un compañero mío, Wayne, mencionó una figura tridimensional no fractal conocida como la trompeta de Gabriel, que tiene una propiedad similar: ¡tiene un área superficial infinita pero solo un volumen finito! Esto significa, de forma bastante rara, que puedes llenar la figura vertiendo en ella una cantidad finita de pintura, pero nunca podrás pintar toda su superficie. Por eso la definición de esta figura se llama a veces la "paradoja del pintor". Fue descubierta en el siglo XVII por Evangelista Torricelli, el mismo físico italiano que inventó el barómetro.

¿Cómo se construye la trompeta de Gabriel? Es realmente muy simple. Toma la gráfica de $y = 1/x$, dibujada desde $x = 1$ y continuando hasta el infinito. Ahora rota la gráfica en círculo alrededor del eje x, formando algo que parece una trompeta gigante, con la parte ancha abierta en $x = 1$ y la parte estrecha prolongándose para siempre hacia el infinito.



Figura 12-1. Trompeta de Gabriel. [10]

Si miras la sección circular en un punto dado, su radio es $1/x$, así que su área es π/x^2. Ahora calculemos el área superficial y el volumen de esta figura. Recordarás que las integrales, o sumas continuas infinitas de $1/x^2$, convergen a una suma finita, porque los valores disminuyen muy rápido y se vuelven despreciables. Así que si hallamos el volumen tomando la integral desde uno hasta infinito, podemos determinar fácilmente que el volumen total de esta figura llega

agradablemente a un valor de π. Pero para hallar el área superficial total, necesitamos integrar el perímetro, que es 2πr en un punto dado, o 2π/x. Así que esta área superficial es proporcional a una integral de 1/x, que sabemos diverge al infinito. Por tanto, podríamos llenar la trompeta con una cantidad finita de pintura, pero paradójicamente esa pintura no podría cubrir completamente la superficie interior. En realidad, si consideramos la pintura como un objeto tridimensional y permitimos que su grosor disminuya en proporción al tamaño de la trompeta, podemos transformar el pintado en un problema de volumen y resolver la paradoja.

Pero algo sigue pareciendo seriamente raro aquí. ¿Cómo podemos tener un volumen finito pero un área superficial infinita? En última instancia, en el caso particular de la trompeta de Gabriel, esto se debe a nuestra desgracia de que las sumas de 1/x crezcan hasta el infinito mientras que las sumas de $1/x^2$ convergen; así, paradójicamente, añadir una dimensión a una figura cuyo tamaño disminuye como 1/x convertirá un valor infinito en un valor finito. Por cierto, de este análisis puedes ver que la trompeta es en realidad solo un representante de una enorme familia de figuras similares, creadas "estirando" una gráfica bidimensional infinita en tres dimensiones usando una función convergente. Por ejemplo, toma la gráfica de y = sen x desde x = 1 hasta infinito, luego engrosarla estirando la gráfica en tres dimensiones por un factor de $1/x^2$ en cada punto, observando el sólido formado por el área entre la curva de la gráfica y el eje x. Obtendrás de manera similar una figura con área superficial infinita y volumen finito.

El verdadero problema aquí es que estamos definiendo figuras que nunca pueden construirse físicamente: no puedes fabricar una trompeta que se extienda realmente hasta el infinito. Cualquier trozo finito de la trompeta de Gabriel que se pueda construir obviamente puede pintarse y llenarse con pintura. Si estuviéramos describiendo una figura que pudiera construirse físicamente, me preocuparía mucho más esta paradoja. Pero tal como está, nuestra descripción de la figura es realmente solo un juego matemático interesante. Puede que te divierta buscar en un libro de cálculo otras funciones integrales convergentes y no convergentes, y descubrir más figuras extrañas que

puedes construir rotando, estirando o extendiendo sus dimensiones, creando propiedades de área y volumen que no encajan.

La paradoja de Monty Hall

De los pódcast Mutación matemática 3 y 109

La llamada paradoja de Monty Hall es un problema famoso de la teoría de la probabilidad que la gran mayoría de ingenieros y científicos responde mal la primera vez que lo oye. Recientemente estuve varias horas atrapado en una conferencia aburridísima y, tras llenar varias páginas del cuaderno con diagramas garabateados, creo que por fin entendí el problema. Veamos si me crees.

Supón que estás en un concurso frente a 3 cortinas, que llamaremos A, B y C. Te dicen que una oculta un premio y las otras contienen cabras. Eliges la cortina A. Pero antes de que se abra, el presentador abre la cortina B, revelando que hay una cabra detrás. ¿Deberías mantener la cortina A o cambiar a la C? Probablemente responderás con el sentido común de que no hace diferencia y que tienes un 50/50 en cualquier caso. Pero te equivocas. Deberías cambiar a la cortina C, con probabilidad 2/3. Para verlo, piensa así. Hay tres situaciones posibles, todas igual de probables:

- Situación 1: elegiste la cortina correcta.
- Situación 2: elegiste la cortina equivocada, y la primera de las no elegidas tiene el premio.
- Situación 3: elegiste la cortina equivocada, y la segunda de las no elegidas tiene el premio.

Si estabas en la situación 1, donde elegiste correctamente la primera vez, obviamente no deberías cambiar. Pero en las situaciones 2 o 3, sí deberías cambiar. Así que con una probabilidad de 2/3, ganarás si cambias de cortina.

Esa explicación puede sonar medianamente satisfactoria, pero hay algo en este problema que hace que la gente insista en que está mal. Tenemos una intuición muy fuerte de que cambiar la puerta no debería importar. No te sientas mal: en un estudio solo el 13% respondió correctamente, y entre los que se equivocan hay intelectos respetados como científicos, premios Nobel y presentadores de pódcast. Incluso el genio matemático húngaro Paul Erdős se equivocó la primera vez.

Cuando la columnista Marilyn Vos Savant escribió un artículo sobre este problema en la revista Parade en 1990, recibió unas 10 mil cartas afirmando que su solución correcta estaba mal, incluidas mil firmadas por doctores. Finalmente esto dio lugar a un artículo de portada en The New York Times en 1991, donde, con su típica astucia mediática, decidieron zanjar el asunto entrevistando al propio Monty Hall, el presentador del concurso. Sorprendentemente, él entendía bastante bien el problema.

Otra forma de pensar en la solución: cuando eliges una puerta, tienes un 1/3 de posibilidades de haber elegido la correcta. En ese caso, debes mantener tu elección original para ganar. Pero hay un 2/3 de posibilidades de que eligieras la puerta equivocada, y en esos casos cambiar de puerta es lo que te da el coche. Si aún dudas de la explicación, puedes encontrar descripciones en línea de un procedimiento para simular el juego con cartas, además de sitios web que ejecutan simulaciones en Java, mostrando que en efecto la probabilidad es de 2/3 de que ganes si cambias de puerta. Pero estas explicaciones siguen siendo un poco insatisfactorias: ¿de dónde viene el resultado raro? ¿Por qué no es 50-50?

Creo que la mejor pista proviene del hecho de que aquí hay una suposición oculta: el presentador sabe qué puerta tiene el coche y siempre usará su conocimiento para abrir una puerta con cabra. El conocimiento del presentador es lo que inclina la probabilidad. Si, en cambio, el presentador no sabe qué puerta es la ganadora y tiene la posibilidad de revelar accidentalmente el coche, el juego cambia completamente. Ahora hay un 1/3 de probabilidad de que cambiar te dé el coche, un 1/3 de que cambiar no te lo dé, Y un 1/3 de que elegiste la puerta equivocada originalmente pero el presentador revela el coche y se le va el juego al traste. Así que, en este caso sin conocimiento, es realmente una decisión 50-50 cambiar o no.

Otra pregunta que alguien me hizo es si esta paradoja de Monty Hall se traduce al popular concurso televisivo Deal or No Deal. En ese programa, el concursante elige uno de 25 maletines que contienen diversas cantidades de dinero y va abriendo gradualmente los que no eligió. A menudo la elección acaba reduciéndose a dos maletines, el que eligieron y uno que no, y el presentador les pregunta si quieren cambiar

antes de abrir el final. En este caso estamos en la situación sin conocimiento, ya que el concursante eligió qué maletines abrir, sin influencia de nadie que conozca su contenido. Así que realmente no importa: la probabilidad de ganar es igual de cualquier forma.

Una bomba nuclear matemática

Del pódcast Mutación matemática 24

En 1913, Alfred North Whitehead y Bertrand Russell completaron el tercer volumen de los Principia Mathematica, una de las obras más importantes del siglo XX. Se trataba de una descripción precisa y minuciosa de los fundamentos de las matemáticas, concebida para permitir la derivación de todas las verdades matemáticas posibles a partir de un conjunto de axiomas e inferencias bien definidos. Los matemáticos suelen saltarse muchos pasos cuando presentan pruebas, y entender un trabajo matemático normalmente requiere bastante bagaje y una buena dosis de intuición. Pero los Principia pretendían ser completamente autosuficientes y no depender de conocimientos externos: simplemente usando los axiomas y siguiendo las reglas expuestas en el libro, todos los teoremas posibles acabarían por ser demostrables. Para que te hagas una idea del nivel de detalle: la demostración de que 1 + 1 = 2 no se alcanza hasta la página 379 del volumen I.

Los tres primeros volúmenes cubrían teoría de conjuntos, números cardinales, números ordinales y números reales. Los autores habían planeado continuar con un cuarto volumen, pero se detuvieron por agotamiento intelectual.

Aunque los Principia fueron sin duda un logro monumental, ¿describieron de verdad un sistema coherente que pudiera eventualmente demostrar todas las verdades matemáticas? Durante muchos años se creyó que sí, pero en 1931 un matemático austriaco de 25 años, Kurt Gödel, dejó atónita a la comunidad académica al demostrar de forma concluyente que había teoremas verdaderos formulables en el sistema de los Principia que jamás podrían probarse. Esto en sí no parecería tan malo; podría significar simplemente que faltaban unos cuantos axiomas más para completar el sistema. Pero el teorema de Gödel iba más allá. Probó que, en principio, cualquier sistema formal coherente lo bastante complejo como para representar los números naturales tendría que contener teoremas verdaderos pero indemostrables. Así, por muchos axiomas que añadieran Whitehead y

Russell, Gödel siempre podría construir una nueva proposición que sabemos que es verdadera por razones externas al sistema, pero que nunca podría demostrarse desde dentro.

La manera en que lo hizo fue mostrando cómo construir una declaración casi paradójica, llamémosla G, que esencialmente dice: "La proposición G no puede ser probada". Si lo piensas un momento, verás por qué, si el sistema es consistente, esta es una afirmación verdadera pero indemostrable. Si fuera falsa, significaría que el teorema G puede probarse… pero entonces habríamos probado un teorema falso y el sistema sería inconsistente. Por otro lado, si es verdadera, significa que hemos creado una afirmación verdadera que nunca podremos demostrar. Y no es la única. Esto es lo que se conoce como una "demostración de existencia": Gödel demostró la existencia de afirmaciones verdaderas pero indemostrables, derribando para siempre la idea de que un sistema formal completo de las matemáticas es posible. Resultados posteriores muestran que en realidad hay un número infinito de tales afirmaciones.

¿Qué significa todo esto? Pues no demuestra que las matemáticas sean inútiles; seguimos descubriendo verdades poderosas y sutiles basándonos en lo que podemos demostrar a partir de nuestros axiomas. Lo que sí demuestra es que, en general, no todo problema matemático es resoluble. Quizá algunos de los Problemas del Milenio sigan sin resolverse al llegar el próximo milenio, simplemente porque describen enunciados verdaderos pero indemostrables. Pero mientras tanto, estoy seguro de que se seguirá haciendo mucha matemática útil.

CAPÍTULO 13

Repensando la realidad

En este capítulo final damos un paso atrás y ponemos en duda algunas nociones fundamentales de la verdad, la falsedad y, en general, de nuestra realidad. ¿Sabemos realmente lo que significa enunciar proposiciones verdaderas y definir con coherencia nuestros términos, o solo estamos jugando con palabras? ¿Existe una conexión sutil entre las matemáticas y la religión? ¿Es posible razonar con exactitud sobre la realidad y la existencia? ¿Existimos siquiera?

Respondiendo a todas las preguntas posibles

Del pódcast Mutación matemática 207

¿Alguna vez has deseado, en tu vida diaria, tener un método sencillo para encontrar todas las respuestas sobre cualquier asunto que te atormenta? Tal vez estés en una crisis personal preguntándote si Dios existe, o quizá te enfrentes a un problema tan mundano como encontrar el camino de regreso a casa cuando estás perdido. Pues bien, según el monje del siglo XIII Ramón Llull, tienes suerte. Llull ideó un sistema filosófico único, basado en la combinación de un conjunto de conceptos primitivos, que —creía— proporcionaría la vía para resolver cualquier dilema imaginable. Su objetivo principal era encontrar un modo de debatir cuestiones religiosas y convertir racionalmente a los paganos al cristianismo sin recurrir a afirmaciones indemostrables de la Biblia ni de otros libros sagrados. Como filosofía, su sistema estaba lejos de ser definitivo o completo y fue desvaneciéndose en la oscuridad. Pero en el camino Llull se convirtió en un gran contribuyente a las matemáticas, con avances en campos tan diversos como el álgebra, la combinatoria y la informática al tratar de desarrollar sus extraños métodos filosóficos.

Llull comenzó enumerando un conjunto de nueve atributos en cada una de varias categorías del pensamiento, que pretendían representar una descripción completa de esa categoría y que pudieran ser

aceptados tanto por cristianos como por no cristianos. Por ejemplo, su primera lista eran los nueve atributos de Dios: bondad, grandeza, eternidad, poder, sabiduría, voluntad, virtud, verdad y gloria. Quería discutir todas las combinaciones de estas virtudes, pero repetirlas sin fin era bastante tedioso en los días anteriores al procesador de textos, así que etiquetó cada una con una letra: B, C, D, E, F, G, H, I, K. Después trazó un diagrama conectando cada letra con las demás, formando una estrella de nueve puntas con vértices totalmente conectados. Al examinar una conexión concreta podías iniciar un debate sobre la relación entre dos atributos de Dios: por ejemplo, al observar la conexión entre B y C, podías discutir cómo la bondad de Dios es grande y cómo su grandeza es buena. Pienses lo que pienses de sus creencias religiosas, esto supuso un avance importante en álgebra: aunque ya existían las nociones básicas de álgebra, las variables solían representarse por palabras cortas en lugar de letras y se entendían simplemente como incógnitas a resolver en una ecuación. Por primera vez, Llull usaba letras para representar algo más complejo que números y las combinaba en expresiones arbitrarias. Además, su diagrama de las relaciones entre atributos era lo que hoy llamamos un grafo, una estructura de datos fundamental en informática. También creó otra representación de las combinaciones posibles como una matriz triangular, otra estructura común hoy en día pero desconocida en la época de Llull.



Figura 13-1. Una de las ruedas de Llull. [11]

El sistema de Llull se complicó aún más cuando introdujo otros conjuntos de atributos y trató de hallar más combinaciones. Por ejemplo, otro de sus conjuntos estaba formado por relaciones: diferencia, concordancia, contrariedad, comienzo, medio, fin, mayoría, igualdad, minoría. También tenía una lista de sujetos: Dios, ángel, cielo, hombre, imaginativo, sensitivo, vegetativo, elementativo, instrumentativo. Podían resultar teóricamente conversaciones filosóficas más profundas al combinar elementos de varias listas. Esto creaba, sin embargo, ciertos problemas. De nuevo etiquetaba con letras cada elemento de esas listas, pero seguir el rastro de todas las combinaciones conducía a una explosión de posibilidades: solo las tres listas vistas hasta ahora dan 9 × 9 × 9, es decir, 729 combinaciones, y tenía en total seis listas principales. Para facilitar la discusión de combinaciones arbitrarias creó un conjunto de tres ruedas anidadas, cada una dividida en nueve sectores, uno por letra. Una se dibujaba en una hoja de papel y las otras dos, progresivamente más pequeñas, en hojas separadas colocadas sobre la primera y giradas de forma independiente. Así desarrolló una especie de máquina primitiva para elaborar las combinaciones de múltiples conjuntos: por cada nueve giros de una rueda girabas una vez la siguiente mayor, y cuando regresabas a tu punto de partida habías explorado todas las combinaciones posibles de las tres ruedas. Varios siglos después, el gran matemático Gottfried Leibniz citaría a Llull como influencia principal al inventar las primeras máquinas mecánicas de cálculo.

También surgieron varias contribuciones más de este trabajo: puede considerarse a Llull como la primera persona en hablar de relaciones ternarias o funciones de más de una variable; y anticipó algunas de las aportaciones de Condorcet a la teoría electoral, de las que hablamos en nuestro capítulo sobre política. Llull, sin embargo, no estaba realmente preocupado por aportar a las matemáticas, sino por desarrollar un sistema filosófico completo. En su propia mente, al menos, creía haberlo logrado: afirmaba que “todo lo que existe está implícito y nada existe fuera de ello”. Para probarlo escribió un extenso tratado desarrollando aplicaciones físicas, conceptuales, geométricas,

cosmológicas y sociales de sus ideas. Al parecer incluso dedicó cinco páginas a mostrar cómo su sistema podía ayudar al capitán de un barco perdido en el mar. Personalmente, yo preferiría tener un GPS. Pero aunque nuestros procesos mentales modernos no sigan estrictamente las directrices de Llull, todavía le debemos gratitud por sus contribuciones matemáticas en el camino.

Sacrificando una cabra al cálculo

Del pódcast Mutación matemática 65

Las diferencias entre matemáticas y religión están bastante claras, ¿no? En matemáticas solo creemos en consecuencias claramente probadas de supuestos elementales. En religión, debemos aceptar por fe cosas que no comprendemos del todo. ¿Pero siempre es así? En realidad, cuando se desarrollan ideas matemáticas nuevas, a menudo se entienden de forma vaga o imprecisa. Como en la religión, la especulación matemática suele comenzar con intuiciones sobre cómo debería ser algo; las definiciones rigurosas y las pruebas pueden quedar para más adelante. Un ejemplo clásico es la definición inicial del cálculo. A principios del siglo XVIII, el filósofo y obispo Berkeley escribió una famosa crítica afirmando que el cálculo era en realidad una especie de religión. Y, en cierto modo, tenía razón.

Para empezar, recordemos algunos conceptos básicos del cálculo. Probablemente recuerdes que una "derivada" —lo que Newton llamaba "fluxión"— es la pendiente de una curva en un punto infinitesimal. Pero ¿tiene sentido esto? Desde Euclides sabemos que por un punto pueden pasar rectas con cualquier ángulo y no hay motivo para preferir una sobre otra. Que el punto esté en una curva no cambia eso. Newton lo definía examinando las pendientes de líneas cada vez más pequeñas que cruzan pares de puntos en la curva; si parecían converger a un valor conocido, como sucede con la mayoría de las curvas geométricas comunes, entonces se podía decir que ésa era la pendiente en el punto.

La demoledora crítica de Berkeley a este método se titulaba The Analyst: A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician. Señalaba que si asumes que tienes intervalos pequeños para obtener una pendiente y luego comprimes esos intervalos hasta un solo punto, has violado tu premisa inicial: ya no puedes confiar en tu información sobre la pendiente. Concluía con una larga lista de preguntas finales para plantear al matemático incrédulo, tales como:

- Consulta 4: "¿Pueden los hombres decir propiamente que proceden con un método científico sin concebir con claridad el

objeto del que tratan, el fin propuesto y el método por el que se persigue?"

- Consulta 16: "¿No pasan por máximas ciertas entre los analistas que ofenden al buen sentido?"
- Consulta 63: "¿Han examinado sus propios principios aquellos matemáticos que claman contra los misterios?"
- Consulta 64: "¿Son los matemáticos, tan delicados en puntos religiosos, estrictamente escrupulosos en su propia ciencia? ¿No se someten a la autoridad, aceptan cosas por confianza y creen en puntos inconcebibles? ¿No tienen sus misterios y, más aún, sus repugnancias y contradicciones?"

Es dudoso que Berkeley estuviera criticando sinceramente el cálculo en aquel momento o que solo intentara defender con fuerza la idea de que, si aceptamos el cálculo, deberíamos ser más indulgentes al considerar el cristianismo. En esa época estaba preocupado por defender su religión contra los deístas. Y tenía razón en que el concepto de límite, esencial para comprender con claridad los puntos infinitesimales del cálculo, no se había definido de manera rigurosa: no fue hasta el siglo XIX cuando Bolzano, Cauchy y Weierstrass definieron con precisión los límites usando el concepto de "pruebas épsilon-delta". En cierto sentido, los científicos de la época aceptaban algo que no habían definido ni demostrado por completo para poder usar las fluxiones de Newton en sus cálculos.

Sin embargo, Berkeley parecía pasar por alto el punto crítico de que el cálculo proporcionaba resultados verificables experimentalmente y, por tanto, aunque no tan sólido como otras ramas de las matemáticas en aquel momento, tenía una conexión clara y demostrada con la realidad. Así que su comparación con la religión resulta un poco forzada. En las décadas siguientes se publicaron numerosos libros y panfletos de contemporáneos de Berkeley refutándole punto por punto.

Pero este episodio sí nos recuerda que la visión "ideal" de las matemáticas que vemos en la escuela —donde el edificio de las pruebas se construye poco a poco hasta definir con precisión todo lo que sabemos hoy— es solo una pequeña parte de la historia. Sin soñadores que den saltos intuitivos por delante de lo que pueden probar, la

humanidad nunca habría alcanzado tanto en el terreno matemático.

Grue y Bleen

Del pódcast Mutación matemática 76

Mi esposa acaba de mirar por la ventana y dice que el césped del jardín es verde. Pero yo sé más. Le dije que en realidad es bleen. Bleen es un color definido por el filósofo del siglo XX Nelson Goodman, de modo análogo a esto: un objeto es bleen si parece verde hasta el 31 de julio de 2018 y luego azul. Existe también un color complementario, grue, que describe objetos que son azules hasta el 31 de julio de 2018 y luego verdes. Estas definiciones pueden sonarte raras, pero en mi tierra natal, Nueva Jersey, las cosas cambiaban de color todo el tiempo por la contaminación, así que estas definiciones me resultan de lo más naturales. ¿Cómo puede mi esposa demostrar que nuestro césped es verde y no bleen? Todos los días, desde que nos mudamos, he mirado por nuestra ventana y para mí siempre ha sido bleen.

Como lector perspicaz, podrías objetar: "Evidentemente tus bleen y grue son definiciones rebuscadas, no nociones naturales de color como el verde y el azul que usamos." Pero yo puedo contestarte fácilmente que es al revés. Antes formulé las definiciones de forma que parecieran complejas, pero para mí bleen y grue son las nociones naturales. Defino tu extraño color "verde" como "bleen hasta el 31 de julio de 2018 y grue después." Así que, como ves, hacen falta muchas palabras para construir este color artificial "verde" al que estás acostumbrado, mientras que mi simple noción de bleen se expresa con una sola palabra. Ahora, ¿qué tan seguro estás de que mi césped no se volverá, en tus términos, azul en algún momento?

Esta divertida y clásica pseudo-paradoja demuestra el problema del razonamiento inductivo en las ciencias. Observamos fenómenos naturales, intentamos proponer las explicaciones y definiciones más simples, y luego usamos esa información para modelar las cosas matemáticamente. Estoy bastante seguro de que, en un nivel fundamental, azul y verde son más simples que grue y bleen —quizá la mejor respuesta que he oído a este dilema es que azul y verde pueden definirse sin referencia al tiempo, describiendo las longitudes de onda

de la luz que representan, mientras que grue y bleen no. Pero ¿acertamos siempre con nuestras inducciones? ¿Es siempre cierto que la explicación más simple de los fenómenos que observamos resultará ser la más correcta?

Un ejemplo famoso de que nos equivocamos es la física de Newton. Sus ecuaciones simples para describir el movimiento de objetos y fuerzas parecieron correctas durante cientos de años, hasta que llegó Einstein. ¿Qué te parece más sorprendente: que mi césped se vuelva azul en un día determinado, o que el tiempo se ralentice un poco para mí si conduzco mi coche lo bastante rápido? ¡Y sin embargo esto último resulta ser cierto! Lo que parece un modelo simple y obvio de la realidad no siempre lo es. Nunca podemos estar seguros de que nuestro razonamiento inductivo sea correcto; nuestras cuidadosas observaciones del pasado siempre podrían estar omitiendo algún factor crucial que llevaría a una teoría completamente diferente. Echa un vistazo por tu ventana: quizá tu césped también es bleen.

Hipopótamos en mi sótano

Del pódcast Mutación matemática 113

Estoy harto de ser ingeniero. Creo que quiero dedicar el resto de mi vida al estudio del hipopótamo salvaje. Hay algunos problemas, claro. Para observar hipopótamos tendría que volar a África, y odio los aviones. Tampoco soy muy fan del calor. Pero usando un principio básico de las matemáticas puedo sortear estos problemas y estudiar hipopótamos sin salir de mi sótano. No estoy hablando de hacer trampa y mirar cosas en Internet: hablo de investigación científica original sobre el hipopótamo salvaje.

¿Cómo logro tal hazaña? Para empezar, veamos cómo funciona la ciencia ordinaria. A menudo tienes alguna proposición sobre el mundo natural, por ejemplo: "Todos los hipopótamos tienen narices grandes." Piensa en esto como una proposición matemática "A implica B", donde A es la propiedad de ser hipopótamo y B la de tener una nariz grande.

Luego irías al campo a investigar, observando un gran número de hipopótamos y determinando qué proporción tiene en efecto narices grandes. Aunque no puedes demostrar la proposición de forma absoluta, estás reuniendo evidencia inductiva, que suele ser lo mejor que los científicos pueden hacer en muchas áreas. Cada caso confirmatorio que observes añade peso a la hipótesis de que A implica B, y que todos los hipopótamos tienen narices grandes.

Supongamos ahora que quiero estudiar esta teoría pero aprovechando un poco de matemáticas primero. Recuerda que empezamos con la proposición A implica B. Lógicamente, A implica B es equivalente a (no B) implica (no A). Piénsalo un momento y verás por qué: si A implica B, entonces cualquier cosa con la propiedad (no B) debe no tener (no A), de otro modo la implicación original sería falsa. Para cualquier enunciado "A implica B" "no B implica no A" es equivalente en valor de verdad y se conoce como la contraposición.

Así que, en lugar de analizar la hipótesis original de que ser hipopótamo implica tener nariz grande, veamos su contraposición: no tener nariz grande implica no ser hipopótamo. Estudiar esto es

lógicamente lo mismo que estudiar la teoría original. Para verificarlo inductivamente, en lugar de tener que buscar hipopótamos como en la proposición original, ahora solo tengo que buscar cosas sin narices grandes y verificar que no son hipopótamos. ¡Eso es fácil! Sentado aquí mismo en mi escritorio veo mi computadora, mi silla, mi estéreo, mi gato, mi hija… infinitas cosas sin narices grandes. Y cada una es un caso confirmatorio de mi teoría, sumando peso a mi evidencia de que todos los objetos sin narices grandes no son hipopótamos. En otras palabras, sin salir de mi sótano he podido hacer investigación original sobre la teoría de que todos los hipopótamos tienen narices grandes.

Si quieres ser puntilloso, podrías señalar que el número de hipopótamos es tan diminuto comparado con el de cosas sin narices grandes que, si pasara toda mi vida catalogando cosas sin narices grandes, aún habría reunido menos evidencia convincente que si hubiera ido al zoo y mirado un solo hipopótamo. Estadísticamente, cada pieza de "evidencia confirmatoria" inductiva usando mi método añade mucha menos confianza a nuestra hipótesis que cada observación de un hipopótamo real. Pero esto no cambia la lógica fundamental de mi argumento. Sigo haciendo ciencia válida en mi sótano, solo que un poco más despacio.

¿Hay un hipopótamo en este pódcast?

Del pódcast Mutación matemática 144

La discusión sobre hipopótamos en la sección anterior me recordó una famosa conversación entre Bertrand Russell y Ludwig Wittgenstein acerca del concepto de verdad y falsedad de las proposiciones lógicas. Wittgenstein afirmaba que las proposiciones existenciales son intrínsecamente carentes de sentido y, como réplica, Russell le preguntó si la afirmación "Hay un hipopótamo en esta sala ahora mismo" es verdadera o falsa. Wittgenstein mantuvo su posición, insistiendo en que la pregunta no podía responderse, mientras Russell, con humor, miraba debajo de todos los pupitres buscando hipopótamos. Varias fuentes aseguran que la discusión era sobre un rinoceronte y no sobre un hipopótamo, pero no creo que la lógica cambie sustancialmente.

La anécdota es divertida y se usa a menudo en debates populares como una pulla humorística para mostrar que los filósofos están desconectados de la realidad. Pero al pensarlo mejor, la afirmación me inquietó un poco: después de todo, Russell era un pensador matemático de primera línea en el siglo XX y, tras la conversación del hipopótamo, comentó que consideraba a Wittgenstein un genio. Debía de haber aquí algún fondo, algún tipo de interpretación lógica en la que la obstinación de Wittgenstein sobre la frase del hipopótamo tuviera sentido. Empecé a navegar por la web buscando una explicación. Me sorprendió no encontrar ninguna que me pareciera clara y concisa: había muchas referencias por su valor humorístico o tratados filosóficos larguísimos, pero ninguna respuesta directa que no fuera "desconexión total de la realidad". Éste es mi intento de resumir lo que encontré.

Para empezar, están las explicaciones psicológicas: parece existir un tema recurrente en la web que sostiene que Wittgenstein probablemente padecía el síndrome de Asperger u otro trastorno del espectro autista. Un afectado por esta condición escribe en la web: "Como Wittgenstein, tenemos la costumbre de oír y ver proposiciones, pero sentir que no dicen nada." Como bien saben quienes han tratado a

un filósofo, es tentador explicar sus afirmaciones por una condición neurológica. Esto cerraría con un lazo la cuestión de la conversación entre Wittgenstein y Russell, pero no me resulta satisfactorio. Ciertamente no explicaría el respeto de Russell por las capacidades de razonamiento de Wittgenstein. Creo que debemos indagar más.

Una interpretación lógica del enunciado es que deriva de la creencia general de Wittgenstein de que el concepto de observación es inválido y su negativa a admitir la existencia de cualquier cosa salvo las proposiciones enunciadas. Así, no bastaría con buscar un hipopótamo usando falibles poderes humanos de observación: su existencia tendría que argumentarse a partir de proposiciones y definiciones fundamentales. Si una proposición, como la del hipopótamo en la sala, contiene términos que no se han definido previamente o no pueden entenderse en función de otras proposiciones, no puede calificarse de verdadera o falsa y debe descartarse simplemente como incoherente. En lo personal, prefiero aceptar la evidencia de mis sentidos aunque no la haya demostrado matemáticamente, pero estoy bastante seguro de que no soy tan listo como Russell o Wittgenstein.

Otra interpretación es que la afirmación depende mucho del marco de referencia y de los pensamientos de los interlocutores. Por ejemplo, ¿contaría un hipopótamo de peluche que Russell tuviera en un cajón? ¿Y un dibujo rápido de un hipopótamo hecho mientras Wittgenstein giraba la cabeza? ¿Y qué tan próximas están las ideas de ambos filósofos sobre la definición de "hipopótamo"? En cierto sentido, esta discusión podría tratar sobre los límites del lenguaje para expresar pensamiento y lógica. Surgen problemas similares en otra famosa y polémica frase de Wittgenstein: "Si un león pudiera hablar, no podríamos entenderlo." Hablar no implica solo comunicar palabras, sino interpretarlas dentro de un esquema conceptual. Un problema parecido podría surgir con el título de esta sección: ¿Hay un hipopótamo en este pódcast? Depende mucho de lo que quiera decir con la pregunta. ¿Tiene que salir un hipopótamo de la página mientras escribo esto, o basta la mera palabra? Dado que esta sección ha pasado del formato de pódcast al de libro, ¿la pregunta carece ahora de sentido?

Debo señalar también que al menos una fuente parece insinuar que

la versión citada comúnmente corta parte de la frase y que la declaración real de Russell fue “Hay un hipopótamo en la sala, pero no puede verse ni tocarse, oírse ni gustarse ni olerse.” Esto arroja una luz completamente distinta sobre el asunto: esta afirmación sí es verdaderamente una que no puede comprobarse por observación y tiene mucho más sentido como algo discutible por filósofos. También hace que todos los que nos hemos esforzado en interpretar el significado de la versión abreviada parezcamos un poco pardillos, pero como soy uno de ellos, mejor lo dejo aquí.

Te he mentido

Del pódcast Mutación matemática 115

Supongamos que aceptas las siguientes afirmaciones:

1. Si la afirmación S tiene una alta probabilidad de ser verdadera, estás justificado en creer S.
2. Si estamos justificados en creer S, y justificados en creer S2, entonces estamos justificados en creer la afirmación “S y S2”.
3. No estamos justificados en creer cosas que sabemos que son falsas.

Parecen bastante razonables, ¿no? Es difícil imaginar gran parte de la ciencia moderna sin tomarlas como base.

Pero en 1961 el filósofo Henry Kyberg encontró aquí una aparente contradicción, en lo que llamó la paradoja de la lotería. Supongamos que tenemos una lotería justa con 1.000 boletos, y tomamos como nuestra afirmación S: “El boleto #1 no ganará la lotería.” Esto tiene un 99,9% de probabilidad de ser cierto, así que sin duda estamos justificados en decir que creemos S. Después tomemos S2: “El boleto #2 no ganará la lotería.” De modo similar, estamos justificados en creer S2. Si continúas el proceso, verás que estamos justificados en creer que NINGÚN boleto ganará la lotería. Pero también sabemos que uno ganará, llevando a una contradicción.

En general, esta paradoja se considera parte del campo filosófico de la epistemología, o teoría del conocimiento. Puedes ver que realmente aplica a casi todo en nuestra vida cotidiana. ¿Cómo justificas que sabes que estás leyendo este libro? Claro, tiene una alta probabilidad de ser cierto, pero quizá solo estés experimentando con LSD y viviendo una vívida fantasía ácida del perfecto tomo matemático de Dios, o la CIA ha colocado una micro-pantalla oculta en tu ojo, reemplazando la subversiva literatura de Mutación matemática con un texto falso aprobado por el gobierno para calmar a las masas. No puedes garantizar absolutamente que ninguna de estas hipótesis sea falsa, y aun así continúas tu día basándote en la creencia de que efectivamente has leído el libro de Mutación matemática. Entonces, ¿dónde está el problema en nuestros supuestos originales?

Quizá no le estoy haciendo justicia a los millones de palabras que los filósofos han escrito sobre esta paradoja, pero, desde mi mundo de la informática, me parece un simple caso de "error de redondeo". Cuando empezamos diciendo que estamos justificados en creer que el boleto perdería, en realidad estábamos siendo perezosos: la afirmación correcta es "el boleto perderá con 99,9% de probabilidad". Al querer establecer una creencia binaria sí/no, redondeamos ese 99,9% a 100%, tirando por la borda información. Y como cualquiera que haya lidiado con cálculos en sistemas informáticos puede decirte, un redondeo razonable para un solo dato puede acumularse hasta un error ridículo cuando agregas muchos. Errores acumulados de redondeo en cálculos han llevado a numerosos desastres reales, como fallos en el sistema de misiles Patriot en EE.UU. y en un índice bursátil de Vancouver.

Así que este redondeo al 100% puede ser razonable para un solo boleto, pero causar un error catastrófico cuando se aplica a 1.000. Visto así, la paradoja no es tal, sino solo una consecuencia de que llamar "creencia" a algo es redondear una cantidad probabilística más compleja a un simple 0% o 100%. A veces tenemos que redondear una probabilidad a una creencia para actuar en la vida real —para decidir, por ejemplo, si compramos ese boleto de lotería— pero eso no es una contradicción, solo una aproximación que usamos para conducirnos día a día. Casi todas las teorías científicas funcionan así: no estamos 100% seguros de que ninguna sea verdadera, pero sí lo bastante como para actuar tentativamente sobre su verdad por ahora.

Mi aspecto favorito de esta paradoja de la lotería es, sin embargo, la extensión conocida como la paradoja del prólogo de David Makinson. Supongamos que has investigado cuidadosamente cada episodio de, por ejemplo, un pódcast de 200 episodios, y estás bastante seguro, aunque no al 100%, de que cada episodio dice los hechos correctamente al producirlo. Sabes que no eres perfecto, y debido al número de episodios, es probable que uno contenga un error en algún lugar. Si tienes un 99% de exactitud, entonces es probable que hayas publicado dos episodios erróneos en algún punto. Así que, cuando el libro superventas basado en transcripciones de tus pódcast se prepara para su distribución, ¿estás justificado en escribir en tu prólogo que el libro contiene un error? Aunque crees racionalmente que cada

afirmación en los pódcast es correcta, también crees, basándote en las probabilidades, que cometiste un error en algún lado. Así que, en cierto sentido, crees racionalmente que Mutación matemática contiene y no contiene un error. Piénsalo unos minutos y creo que verás que la explicación del redondeo se aplica también a este ejemplo: la mejor resolución es decir que, cuando quitas el redondeo que hiciste con cada capítulo, Mutación matemática probablemente contenga algún error. Lo siento por eso.

¿Existe este pódcast?

Del pódcast Mutación matemática 177

Recientemente un amigo me señaló un artículo interesante en io9.com titulado “Estás viviendo en una simulación por computadora, y las matemáticas lo prueban.” Seguro que conoces el concepto de la realidad como una elaborada simulación informática, una idea ilustrada de forma famosa en las películas de Matrix, pero presente en alguna u otra forma desde mucho antes. Incluso antes de los ordenadores, los filósofos discutían si la vida era real o solo algún tipo de sueño en la mente de poderosos seres desconocidos. Gran parte de la discusión reciente sobre el tema parece haber sido impulsada por un artículo de 2003 en Philosophical Quarterly de Nick Bostrom, de la Universidad de Oxford, “¿Estás viviendo en una simulación por computadora?”, que fue una de las inspiraciones para el artículo de io9. Según este artículo en particular, podemos demostrar solo con matemáticas que casi con certeza vivimos en una simulación informática.

Así va el argumento básico. Supongamos que es posible para una civilización suficientemente avanzada crear una computadora capaz de ejecutar una simulación de la complejidad de nuestro universo. Si se pudiera crear tal simulación, ¿harían estos seres avanzados solo una, o muchas? Basta mirar las cifras de ventas de The Sims, un juego de simulación mucho más primitivo de nuestro tiempo, y creo que estarás de acuerdo en que si pudieras comprar un disco de Xbox que ejecute una simulación completa de un mundo tipo Tierra para tu propio entretenimiento, mucha gente lo haría. Así que por cada realidad real, hay millones o incluso miles de millones de realidades simuladas. Entonces, planteemos la pregunta: dada una realidad arbitraria, a saber la nuestra, ¿es real o simulada? Las probabilidades son de millones o miles de millones a una de que sea una de las simuladas. Suena como un argumento bastante convincente, ¿no?

Por supuesto, esto depende de algunos supuestos un tanto cuestionables. El primero es la idea de que sería posible generar una simulación de la complejidad de nuestra realidad: aunque extrapolar la

tasa de avances en computación del último siglo lo hace parecer plausible, en realidad no podemos estar seguros. Puede que exista algún límite fundamental al poder de cálculo que quede por debajo de lo necesario para una simulación completa de este tipo. Otro supuesto es que las criaturas lo bastante avanzadas como para crear tal simulación elegirían hacerlo: quizá esas civilizaciones avanzadas tenderían a desarrollar filosofías morales que no aceptarían crear seres conscientes para diversión de otros. Yo me inclinaría más bien a argumentar desde la idea inversa: si algunos seres poderosos pudieran manipular arbitrariamente las leyes de nuestra realidad para su propio divertimento, como un jugador que usa trucos en Fallout 3 para convertir a todos en un radio de una milla en vacas bicéfalas solo por diversión, ¿por qué no observamos muchas más violaciones arbitrarias de las leyes físicas?

Un agujero más serio en este argumento, también discutido por Bostrom, es que no hemos considerado cuántos universos existen en los que la civilización nunca alcanza el nivel capaz de crear tal simulación. Quizá es cierto que cuando una civilización alcanza ese nivel, crea mil millones de simulaciones, pero al mismo tiempo quizá solo una entre mil millones de mil millones de civilizaciones llega a ese nivel, lo que echa por tierra todo el argumento. Podría ser simplemente una tendencia natural de los seres sintientes destruirse entre sí en guerras nucleares mucho antes de desarrollar un programa informático universal de simulación. Si este es el caso, las probabilidades son de mil millones a una de que seamos reales en lugar de parte de una elaborada simulación. Lo siento, fans de Matrix.

Otra tendencia intrigante en esta discusión es la búsqueda, por parte de algunos físicos, de evidencia directa de que realmente estamos en una simulación informática. La idea es encontrar, en las propias leyes físicas de nuestro universo, elementos que serían signos reveladores de una simulación. Por ejemplo, los científicos podrían detectar efectos de rayos cósmicos viajando en una diminuta retícula de líneas regulares, como píxeles en una pantalla, en lugar de poder existir realmente de forma continua en el espacio-tiempo. Suena como una idea bonita, pero soy bastante escéptico respecto a esa búsqueda: ¿cómo podemos asegurar que ese comportamiento tipo retícula, o

cualquier observación inesperada de la física, sea el resultado de ser una simulación y no de alguna nueva ley sutil de la física que aún no hemos descubierto? Si hubieran observado efectos relativistas experimentalmente antes de que llegara Einstein, ¿habrían afirmado que la distorsión temporal durante aceleraciones altas era prueba de que vivíamos en una simulación informática defectuosa, dado que las observaciones violaban la realidad que todo el mundo sabe que describen las leyes de Newton?

En la misma línea están los argumentos de que podemos inferir prueba de creación artificial de nuestro universo por el hecho de que tantas constantes físicas parecen estar ajustadas con precisión para permitir la vida consciente. Esto aparece mucho en argumentos del Creacionismo y del "Diseño Inteligente". Pero, a mi modo de ver, este razonamiento ha sido completamente demolido por el principio antrópico: quizá exista un número igual de otros universos con distintas constantes, pero quienes hacemos la pregunta tenemos que estar en el que tiene las constantes adecuadas para la vida, de otro modo no podríamos plantearla.

En fin, me temo que este libro no podrá responder de forma definitiva a la cuestión de si somos reales o una simulación. Además, si eres un meta-ser escuchando este pódcast desde otro universo mientras monitorizas nuestro universo simulado en tu pantalla, no te rías demasiado de mi divertido nivel de ignorancia simulada: podrías seguir siendo parte de una simulación en un meta-meta-universo, y yo tampoco puedo probarlo de forma concluyente para ti. Pero la próxima vez que estés trasteando con nuestra realidad por diversión, unas cuantas reseñas de 5 estrellas más en iTunes no estarían mal.

Un universo hecho de matemáticas

Del pódcast Mutación matemática 105

Quizá hayas visto en los medios algunas discusiones sobre una teoría extraña del cosmólogo Max Tegmark. Él resume su teoría con una frase concisa: “solo existe la matemática; eso es todo lo que hay”. En otras palabras, el universo es solo un objeto matemático, y cada objeto matemático consistente es, en cierto sentido, su propio universo. Si le entiendo bien, está diciendo que el multiverso consiste en todos los universos matemáticamente describibles, y que todos tienen igual derecho a existir.

Si todavía no estás completamente confundido, sigue especificando que hay cuatro “niveles” del multiverso que podemos describir. El Nivel 1 es el espacio infinito que parece rodearnos. El Nivel 2 es el conjunto múltiple de universos de Nivel 1 que surgen si hay más de una solución a las ecuaciones del Big Bang. El Nivel 3 proviene de la interpretación de los “muchos mundos” de la mecánica cuántica, de la que hablamos en capítulos anteriores: cada vez que ocurre un evento cuántico, en el que pueden suceder dos resultados posibles, el universo se divide en varios, cada uno mostrando uno de los resultados. (Esta idea fue propuesta originalmente en 1957 por el físico estadounidense Hugh Everett, y popularizada después por Bryce Seligman DeWitt en los años 60; lamentablemente, pese a su genial nombre, sin relación conmigo). Como los describe Tegmark: “Los universos paralelos son como diferentes páginas de un libro, existentes de forma independiente, simultánea y justo al lado unas de otras. De algún modo, todos esos infinitos universos de nivel III existen aquí mismo, ahora mismo.”

El más extraño es el multiverso de Nivel 4, que consiste en todas las estructuras matemáticas consistentes que pueden describir un universo. En otras palabras, cualquier universo matemáticamente posible existe, tan real como el nuestro: nosotros solo somos uno de muchos conjuntos posibles de abstracciones matemáticas. Suena bastante loco, pero de una manera rara, esto resuelve algunos problemas filosóficos centrales de la física. Para empezar, cuando

descubrimos constantes y ecuaciones que describen nuestro universo, siempre nos preguntamos: ¿por qué estas? Esta hipótesis da una respuesta: todos los conjuntos posibles de ecuaciones y constantes que funcionan forman universos propios, y nosotros simplemente estamos observando el que nos tocó. Y entonces la interpretación de muchos mundos de la mecánica cuántica, que pide que el universo se divida en un número exponencial de otros en cada evento cuántico, deja de ser un problema: en lugar de la imposible proposición de duplicar instantáneamente universos físicos, todos los universos matemáticamente describibles existen de forma inherente.

Seguro que ya se te han ocurrido muchas críticas a esta teoría. Nosotros sentimos que existimos; ¿dónde encaja la conciencia humana en todo esto? ¿Puede realmente una abstracción matemática creer que es consciente? En cierto sentido, sin embargo, si creemos que podemos crear inteligencia artificial con ordenadores, esto no es tan diferente. Otra objeción: ¿es realmente distinto decir que todo lo matemáticamente posible existe, y decir que nada existe? Esto se reduce, en cierto modo, a la pregunta anterior: nuestra propia existencia parece cualitativamente distinta de la "existencia" de objetos matemáticos que describimos en papel.

La mejor objeción que he oído a esta teoría en general es quizá el "Principio de la imaginación finita": hay una razón lógica por la que el universo es como es y por la que existimos, aunque quizá no nos sea posible comprenderla. El hecho de que la mejor forma que tenemos de describir nuestro universo sea a través de nuestro sistema matemático puede reflejar simplemente las limitaciones de la mente humana.

¿Qué piensas? No lo pienses demasiado, porque la respuesta que vas a formular podría estar predeterminada por las leyes matemáticas del universo de todos modos.

Inmortalidad matemática

Del pódcast Mutación matemática 178

Desde los albores de la humanidad, y probablemente mucho antes de que el primer cavernícola descubriera que 2 más 2 son 4, nos hemos estado preguntando qué pasa con nuestras almas después de morir. ¿Continúa nuestra conciencia de alguna forma cuando ya no estamos? ¿O simplemente desaparece del universo, para no volver a experimentarse? No voy a intentar responder esto desde el punto de vista filosófico, espiritual o religioso, ya que hay miles de mejores guerras de llamas en Internet disponibles si queremos debatir esos temas. Pero si nos restringimos al ámbito de las matemáticas y la física, ¿podemos aún construir un buen argumento para algún tipo de vida después de la muerte?

Uno de los argumentos más directos en este tema proviene de la interpretación de muchos mundos de la mecánica cuántica, como discutimos en la sección anterior. Esta interpretación deriva del hecho de que la física cuántica describe los eventos subatómicos en forma de ondas de probabilidad, múltiples resultados posibles con distintas probabilidades. Un resultado definitivo no ocurre hasta que el sistema se observa y la onda colapsa en un estado particular. Un ejemplo clásico es el gato de Schrödinger: un gato encerrado en una caja con una cápsula de veneno que se libera solo si un átomo radiactivo en particular decae en la siguiente hora. (Por suerte PETA no existía aún durante el desarrollo de la física cuántica.) Hasta que se abra la caja y colapse la función de onda, el gato no está ni vivo ni muerto: la caja solo puede describirse por una superposición de estados que etiquetan al gato como posiblemente vivo y posiblemente muerto.

La interpretación de muchos mundos describe esta situación en términos de múltiples universos. Cuando ocurre un evento cuántico, como la desintegración del átomo en la caja, nuestro universo en realidad se bifurca en dos, uno representando cada probabilidad. Así que en un universo el gato está vivo, y en el otro está muerto. Este ejemplo del gato debería dejar claro cómo se relaciona con nuestra

discusión de la inmortalidad: aunque abramos la caja, veamos al gato muerto y lo lloremos, hay otro universo en el que el gato saltó vivo de la caja y está feliz jugando con una bola de cables USB. En cualquier caso en que alguien muere en una situación en la que podría haber sobrevivido teóricamente debido a un evento cuántico distinto, hay otro universo cercano en el que sigue vivo.

Los lectores astutos pueden haber pensado ya en una objeción a afirmar que esto lleva a una forma de inmortalidad: claro, dice algo sobre la vida después de muertes prematuras, pero ¿qué hay de las causas inevitables de muerte, como la vejez? Seguramente en todos los universos posibles, por triste que sea para la comunidad de pódcast, yo estaré muerto dentro de 100 años. Aunque las generaciones anteriores no tengan suerte, nosotros sí tenemos una respuesta también para esto: la singularidad tecnológica.

La idea de la singularidad es que la tecnología ha estado avanzando a un ritmo exponencial durante la mayor parte del último siglo. Incluso cuando estaba en la universidad, no soñaba que a mediana edad tendría un dispositivo en el bolsillo capaz de almacenar mil pódcast de ciencia y aún jugar a Walking Dead con potencia de sobra. El crecimiento tecnológico ha sido en cierto modo como una gráfica de $y = 2^n$: aunque empiece lento, muy pronto se dispara hacia el infinito. Si podemos sostener este ritmo de crecimiento, puede ser solo cuestión de décadas hasta que seamos capaces de hazañas tecnológicas que hoy veríamos como casi infinitamente poderosas. Cuando esta “singularidad” llegue, seremos capaces de subir el contenido de nuestro cerebro a un potente dispositivo de computación, continuando nuestra conciencia indefinidamente sin las limitaciones de nuestros frágiles cuerpos humanos. Así que, si en solo un universo paralelo logramos sobrevivir lo suficiente para llegar a la singularidad y subir nuestro cerebro a un ordenador con una buena garantía extendida y copias de seguridad fiables, seremos realmente inmortales.

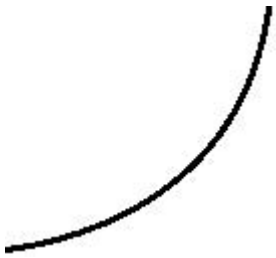


Figura 13-1. Crecimiento exponencial.

Si hablamos de la mente como software, tampoco deberíamos descartar otra posible forma de inmortalidad, distinta de la basada en los muchos universos que hemos estado comentando hasta ahora. Si tu conciencia está formada por un patrón finito de descargas eléctricas en tu cerebro, ¿por qué tendría que ocurrir ese patrón solo en tu cerebro y tu cuerpo actuales? Hay cosas por todo el universo —estrellas, planetas, cuásares y otras— que exhiben constantemente muchos patrones arbitrarios de actividad entre los electrones que las componen. ¿Por qué no podría uno de esos patrones aleatorios ser, efectivamente, un programa de software que ejecute exactamente tu conciencia, solo que continuando después de que tu cuerpo terrestre muera? Claro, sería un poco coincidencia, pero si el universo es infinito, quizá todo patrón posible de electrones ocurra en algún lugar y en algún momento. (Hay aquí una pequeña llave inglesa en el engranaje: los distintos tamaños de infinitos de los que hablamos antes en este libro; pero como no sabemos las clases apropiadas de infinito para las posibilidades de nuestros cerebros ni para el universo, somos libres de especular). Y esto sin contar siquiera la posibilidad de la que hablamos unas secciones atrás, en la que tu mente ya es una simulación intencional que puede reiniciarse.

Antes de concluir, me gustaría dedicar este libro a la memoria de mi padre, Morton Seligman, que falleció recientemente a la edad de 75 años. Si puede resistir hasta la singularidad en un universo cercano, quizá lo veamos de nuevo en algún momento. O puede que ahora mismo esté sentado en un trono del inframundo junto a Hades, riéndose de nosotros por estas tontas discusiones matemáticas mientras ignoramos la verdadera realidad.

APÉNDICE

Referencias y lecturas adicionales

Aquí proporcionamos una lista detallada de las fuentes que inspiraron cada capítulo de este libro y que suministraron la mayor parte de los datos originales. Cuando una referencia se especifica como una página web sin fecha clara de origen, la fechamos con la fecha en que se recuperó la página, durante la edición de este libro a principios de 2016. En algunos casos desafortunados, algunas de las fuentes originales de los episodios del pódcast han desaparecido de la web, pero he hecho todo lo posible por encontrar referencias sustitutivas en esos casos.

Capítulo 1: Sorpresas sencillas

Ciudad de mutantes

Sin referencias.

Dos más dos son cinco

[And14] Craig Andresen, "Common Core is Nothing But Ideological Paste" The National Patriot, http://www.thenationalpatriot.com/tag/225/ , 2014

[Ben13] J.R. Benjamin, "Does Two Plus Two Equal 4?" Bully Pulpit blog, http://jrbenjamin.com/2013/07/02/22/ , 2013

[Des41] Rene Descartes, Meditation 1, as translated at http://www.wright.edu/~charles.taylor/descartes/meditation1.html. Originally published in 1641.

[Eul04] Houston Euler, "The History of 2+2=5" http://www.uni-graz.at/imawww/pages/humor/twoandtwo.html, 2004

[Pyu05] Eddie Pyune, "2+2=5" Urban Dictionary, http://www.urbandictionary.com/ define.php?term=2+%2B+2+%3D+5, 2005

[Str98] Straight Dope, "Does 2+2=5 For Very Large Values of 2?" http://www.straightdope.com/columns/read/1382/does-2-2-5-for-very-large-values-of-2 , 1998 [W2p16] la Wikipedia article, "2+2=5" https://en.la Wikipedia.org/wiki/2_%2B_2_%3D_5,

Trucos estúpidos con números

[Gar84] Martin Gardner, “Quiz Kids'. New York Review of Books, March 16, 1984.
[Smi84] Stephen Smith, “Trade Secrets' New York Review of Books, November 8, 1984

Dígitos engañosos

[Gol11] Ben Goldacre, “The Special Trick That Helps Us Identify Dodgy Stats' The Guardian, September 16 2011
[Hay12] Allyn H. Haynes, “Detecting Fraud in Bankrupt Municipalities Using Benford’s Law' Scripps College thesis, http://scholarship.claremont.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1043&context=scripps_theses , 2012
[Nig99] Mark J. Nigrini, “I’ve Got Your Number' Journal of Accountancy, May 1999
[Tit12] John Titus, “How Obama is Guaranteeing the Next Financial Crisis will be Much Worse' The Daily Bail, http://dailybail.com/home/how-obama-is-guaranteeing-the-next-financial-crisis-will-be.html, 2012
[WBe16] la Wikipedia article, “Benford’s Law' http://en.la Wikipedia.org/wiki/Benford's_law

Aleatoriedad no aleatoria

[Ful08] John Fuller, 'How the iPod Shuffle Works' How Stuff Works, http://electronics.howstuffworks.com/ipod-shuffle.htm, 2008
[WBi16] la Wikipedia article, “Birthday Paradox' http://en.la Wikipedia.org/wiki/Birthday_paradox

Una verdadera celebración navideña

[Pau88] John Allen Paulos, Innumeracy, Hill and Wang, 1988
[Zyr16] Zyra, “Caesar’s Last Breath' http://www.zyra.tv/lbreath.htm
Forgotten Knowledge
[Asi58] Asimov, Isaac, “The Feeling of Power”,’ If: Worlds of Science Fiction, February 1958
[WEN16] la Wikipedia article, “ENIAC' http://en.la Wikipedia.org/wiki/ENIAC
Exponents Squared
[Tet15] Tetration.org website, http://www.tetration.org/Tetration/index.html, 2015
[WTe16] la Wikipedia article, “Tetration' http://en.la

Wikipedia.org/wiki/Tetration

Giving You The Fingers

[Int02] Inutitor, “How to Count to 1023 on your Fingers” http://www.intuitor.com/ counting/, 2002

[WCh16] la Wikipedia article, “Chinese number gestures” http://en.la Wikipedia.org/ wiki/Chinese_number_gestures

[Har16] Andy Harris, “Chisenbop Tutorial” http://www.cs.iupui.edu/~aharris/ chis/chis.html

[Ias16] Iowa State University, “Medieval Finger Counting” http://orion.math. iastate.edu/mathnight/activities/modules/count/countleft.pdf

Capítulo 2 Hacia lo infinito

Demasiado infinito para mí

[WCa16] la Wikipedia article, “Cantor’s Diagonal Proof” http://en.la Wikipedia.org/ wiki/Cantor%27s_diagonal_proof

[WHi16] la Wikipedia article, “Hilbert Hotel” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ HilbertHotel

Infinitamente adelantado a su tiempo

[WGe16] la Wikipedia article, “Georg Cantor” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Georg_cantor

[WTr16] la Wikipedia article, “Transfinite Number” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Transfinite_number

[Hay09] Gary and Michael Picard Hayden, This Book Does Not Exist, Fall River Press, 2009

Infinitos infinitos

[WPo16] la Wikipedia article, “Power Set” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Power_set

Infinito por infinito

[WSu16] la Wikipedia article, “Surreal Number” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Surreal_number

[MCC07] MarkCC, “Introducing The Surreal Numbers” Scientopia blog, http://scientopia.org/blogs/goodmath/2007/03/29/introducing-the-surreal-numbers-edited-rerun, March 29 2007

[Cho06] Paul Chou, “Surreal Numbers Presentation Outline” http://ocw.alfaisal.edu/NR/rdonlyres/Mathematics/18-304Spring-2006/D94A1BD0-FD02-41CD-9334- 5CD0FE83D873/0/surreal_chou.pdf, May 2006

[Con01] John Conway, On Numbers and Games, A.K.Peters, 2000

[Pri16] Princeton University, John Conway faculty bio, http://www.princeton.edu/main/news/archive/S37/10/88C95/#comp000051b310d4000000025e0bd3

Perímetro infinito, área finita

[WKo16] la Wikipedia article, “Koch Snowflake” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Koch_snowflake

[WFr16] la Wikipedia article, “Fractal” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Fractal

Una biblioteca bastante grande

[Bor62] Jorge Luis Borges, “The Library of Babel” in Labyrinths, New Directions, 1962

[WLi16] la Wikipedia artcile, “The Library of Babel” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ The_Library_of_Babel

Alguien tumbó mi 8

[Ruk82] Rudy Rucker, Infinity and the Mind, Birkhauser, 1982.

[WIn16] la Wikipedia article, “Infinity” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Infinity

Rudy Rucker’s infinity and the mind

Casi infinito

[Bae13] John Baez, Blog Entry, https://plus.google.com/117663015413546257905/ posts/KJTgfjkTZCQ, January 11 2013

[Gar77] Martin Gardner “Mathematical Games” Scientific American, Nov. 1977

[MOv12] Math Overflow, “Reconstructing the Argument that Yields Graham’s Number” http://mathoverflow.net/questions/117006/reconstructing-the-argument-that-yields-grahams-number, 2012

[Wei16] Eric W. Weisstein,”Graham’s Number,” MathWorld--A Wolfram Web

Resource, http://mathworld.wolfram.com/GrahamsNumber.html
[WGa16] la Wikipedia article, “Graham’s Number” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Graham%27s_number
[WKn16] la Wikipedia article, “Knuth’s Up-Arrow Notation” http://en.la Wikipedia.org/ wiki/Knuth%27s_up-arrow_notation

Números gigantes al revés

[Cra97] Richard Crandall, “The Challenge of Large Numbers” Scientific American, February 1997
[Mun16] Robert Munafo, “Notable Properties of Specific Numbers” http://mrob.com/pub/math/numbers-22.html
[Vil09] John Carl Villanueva, “How Many Atoms Are There in the Universe” Universe Today, http://www.universetoday.com/36302/atoms-in-the-universe/ , 2009
[WJo16] la Wikipedia article, “John Carter of Mars” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ John_Carter_of_Mars
[WUn16] la Wikipedia article, “The Universe” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Universe

Capítulo 3: Explorando la geometría

Algo que Euclides pasó por alto

[WMo16] la Wikipedia article, “Morley’s Trisector Theorem” http://en.la Wikipedia.org/ wiki/Morley%27s_trisector_theorem
[Mat16] Mathpages.com, “Morley’s Trisector Theorem” http://www.mathpages.com/ home/kmath376/kmath376.htm
[Bog16] Alexander Bogolmony, “Morley’s Miracle” http://www.cut-the-knot.org/ triangle/Morley/
[Ubc16] UBC Math Pages, “J. Conway’s Proof” http://www.math.ubc.ca/~cass/ courses/m308-02b/projects/hui/proof1.html

Cómo no decorar tu baño

[WGi16] la Wikipedia article, “Girih Tiles” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Girih_tiles
[WPe16] la Wikipedia article, “Penrose Tiling” http://en.la Wikipedia.org/wiki/

Penrose_tiling

Abejas contra matemáticos

[Pet99] Ivars Peterson, “The Honeycomb Conjecture” Science News, July 1999
[WHo16] la Wikipedia article, “Honeycomb” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Honeycomb
[WRe16] la Wikipedia article, “Regular Tiling” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Regular_tiling

Un roce con el mal

[WPe16] la Wikipedia article, “Pentagram” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Pentagram
[Wei16b] Eric W. Weisstein, "Pentagram,” MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Pentagram.html
[Ske13] Skeptic’s Dictionary, “The Pentagram” http://www.skepdic.com/ pentagram.html

Más retorcido de lo que creías

[WMo16] la Wikipedia article, “Mobius Strip” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ M%C3%B6bius_strip
[Ple16] David Pleacher, “Mobius Strip” Mr. P’s Math Page, http://www.pleacher.com/ mp/puzzles/tricks/mobistrp.html
[Doh00] Paul Doherty, “Mobius Dissection” http://www.exo.net/~pauld/ activities/mobius/mobiusdissection.html , 2000
[Ger02] Vivienne Gerristen, “The Protein With a Topological Twist” Protein Spotlight, http://web.expasy.org/spotlight/back_issues/sptlt020.shtml , 2002
[WRe16] la Wikipedia article, “Recycling Symbol” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Recycling_symbol
[Thu16] Eric Thul, “The Geometry of Musical Chords” McGill University, http://www.cs.mcgill.ca/~ethul/pub/course/comp644/project/z-onepage.pdf
[Har09] Vi Hart, “Mobius Music Box” YouTube, http://www.youtube.com/ watch?v=3iMI_uOM_fY, 2009
[Kas16] Alex Kasman, “Motif=Mobius Strip/Nonorientability” Mathematical Fiction, http://kasmana.people.cofc.edu/MATHFICT/search.php?

orderby=title&go= yes&motif=mob

Aplasta esos dados

[WPl16] la Wikipedia article, “Platonic Solids” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Platonic_solids

Dados locos

[Dis16] The Dice Shop, “D7 Specialist Dice” https://www.thediceshoponline.com/ dice-sets/157/D7-Specialist-Dice

[Dic16] Dice Collector, “Dice Patents” http://www.dicecollector.com/ DICEINFO_PATENTS.html

Ruedas que no son redondas

[San08] Chris Sangwin, “Applications of Shapes of Constant Width” http://web.mat. bham.ac.uk/C.J.Sangwin/howroundcom/roundness/applications.html , 2008

[Gar14] Martin Gardner, Knots and Borromean Rings, Cambridge University Press, 2014

[WCu16] la Wikipedia article, “Curve of Constant Width” https://en.la Wikipedia.org/ wiki/Curve_of_constant_width

[WRe16] la Wikipedia article, “Reuleaux Triangle” https://en.la Wikipedia.org/wiki/ Reuleaux_triangle

El futuro que nunca llegó

[WGe16] la Wikipedia article, “Geodesic Dome” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Geodesic_dome

[Bal16] J. Baldwin, “Geodesic Domes” http://www.thirteen.org/bucky/dome.html

[BFI16] The Buckminster Fuller Institute, http://bfi.org

[Fie16] Simon Field, “A Geodesic Dome” Sci Toys, http://sci-toys.com/scitoys/ scitoys/mathematics/dome/dome.html

[WBu16] la Wikipedia article, “Buckminster Fuller” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Buckminster_Fuller

[Urn99] Kirby Urner, “Synergetics on the Web” http://www.grunch.net/ synergetics/, 1999

Capítulo 4: Dimensiones más profundas

Haciendo real a Planilandia

[Abb80] Edwin A. Abbott, Flatland, 1884, full text available at Gutenberg: http://www.gutenberg.org/ebooks/97

[Bur83] Dionys Burger, Sphereland, Harper and Row, 1983

[Dew00] A.K. Dewdney, The Planiverse, Copernicus, 2000

[Hin80] C.H. Hinton, Speculations on the Fourth Dimension, Dover, 1980

[Ste08] Ian Stewart, The Annotated Flatland, Basic Books, 2008

[WFl16] la Wikipedia article, "Flatland" http://en.la Wikipedia.org/wiki/Flatland

¿Está condenado Planilandia?

[Dew00] A.K. Dewdney, The Planiverse, Copernicus, 2000

[WEs16] la Wikipedia article, "Escape Velocity" http://en.la Wikipedia.org/wiki/Escape_velocity

Visitantes de la próxima dimensión

[Ruc85] Rudy Rucker, The Fourth Dimension, Mariner Books, 1985

[WFo16] la Wikipedia article, "The Fourth Dimension" http://en.la Wikipedia.org/wiki/Fourth_dimension

¿Puede presentarse la verdadera cuarta dimensión?

[Ruc85] Rudy Rucker, The Fourth Dimension, Mariner Books, 1985

[WDi16] la Wikipedia article, "Dimension"' http://en.la Wikipedia.org/wiki/Dimension

[WWo16] la Wikipedia article, "Worldlines" http://en.la Wikipedia.org/wiki/Worldline

Una casa en cuatro dimensiones

[Hei41] Robert Heinlein, "And He Built a Crooked House" Astounding Science Fiction, February 1941

Dar la vuelta en el tiempo

[Ruc85] Rudy Rucker, The Fourth Dimension, Mariner Books, 1985

[Har99] David M. Harrison, "AntiMatter" Upscale,

http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/AntiMatter/AntiMatter.html, 1999

[New97] New Scientist, “World of Antimatter” https://www.newscientist.com/article/mg15320699.4O0-world-of-antimatter/ , 1997

Monstruos espagueti de 11 dimensiones

[WSt16] la Wikipedia article, “String Theory” http://en.la Wikipedia.org/wiki/String_theory

Tu cocina en cinco dimensiones

[Cyb16] Cybernox Cookware site, http://www.dvorsons.com/Sitram/Cybernox/Cybernox.html

[Sli06] Slidefinder, “Quasicrystals” http://www.slidefinder.net/q/quasicrystals_what_why_exist/northwestern_4-7-2006/7508252, 2006

[WPe16] la Wikipedia article, “Penrose Tiling” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Penrose_tiling

[WQu16] la Wikipedia article, “Quasicrystals” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Quasicrystal

[Web16] Steffan Weber, “Quasicrystals web page” http://jcrystal.com/steffenweber/qc.html

A medida que pasa la matemática

[Dav08] Philip J. Davis, “Will A Kiss Remain A Kiss?” SIAM news, Vol 41, No 8, April 2008

[Ran06] Lisa Randall, Warped Passages, Harper Perennial, 2006

[Hup31] Herman Hupfeld, “As Time Goes By” available at http://www.reelclassics.com/Movies/Casablanca/astimegoesby-lyrics.htm, 1931

[Ste16] Rod Stewart, “As Time Goes By” alternate lyrics, http://www.azlyrics.com/lyrics/rodstewart/astimegoesby.html

Entre las dimensiones

[Van16] Vanderbilt University, “Fractals and the Fractal Dimension”, http://www.vanderbilt.edu/AnS/psychology/cogsci/chaos/workshop/Fractals.html

Capítulo 5: Comprendiendo el universo

¿El "Bang" falso?

[Ruc08] Rudy Rucker, "Voices in the White'' Rudy Rucker Blog, http://www.rudyrucker. com/blog/2008/05/O5/voices-in-the-white/, May 5th 2008

[Ste16] Paul J. Steinhardt, "A Brief Introduction to the Ekpyrotic Universe',' Princeton University, http://www.physics.princeton.edu/~steinh/npr/

[Whi01] David Whitehouse, "Before the Big Bang' BBC News, http://news.bbc.co.uk/ 2/hi/science/nature/1270726.stm, 2001

La forma del universo

[Bat04] Stephen Battersby, "Big Bang Glow Hints at Funnel-Shaped Universe' New Scientist, https://www.newscientist.com/article/dn4879-big-bang-glow-hints-at- funnel-shaped-universe/, 2004

[Lum06] Jean-Pierre Luminet, "The Shape of the Universe After WMAP Data' Brazilian Journal of Physics, Vol 36, No 1b, March 2006

[Nas14] NASA, "Will The Universe Expand Forever?' http://map.gsfc.nasa.gov/ universe/uni_shape.html, 2014

[WPi16] la Wikipedia article, "Picard Horn' https://en.la Wikipedia.org/wiki/ Picard_horn

[WSh16] la Wikipedia article, "Closed Universe' http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Closed_universe#Closed_Universe

Tu tamaño en el espacio y en el tiempo

[Gru88] Robert Grudin, Time and the Art of Living, Ticknor & Fields, 1988

Observando el Universo

[WOb16] la Wikipedia article, "Observable Universe' http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Observable_universe

Álgebra alienígena

[Pom05] Carl Pomerance, "Prime Numbers and the Search for Extraterrestrial Intelligence' https://math.dartmouth.edu/~carlp/PDF/extraterrestrial.pdf, 2005

Mundos con el tiempo invertido

[Gar06] Martin Gardner, The New Ambidextrous Universe, Dover, 2006

[Quo12] Quora, "Why is it believed that positrons are electrons that are moving backwards in time?' https://www.quora.com/Why-is-it-believed-that-positrons- are-electrons-that-are-moving-backwards-in-time , 2012

[Von69] Kurt Vonnegut, Slaughterhouse-Five, Delacorte, 1969

[WAn16] la Wikipedia article, "Antimatter" http://en.la Wikipedia.org/wiki/Antimatter

[WBa16] la Wikipedia article, "Baryon Asymmetry" http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Baryon_asymmetry

[WFe16] la Wikipedia article, "Feynman Diagram" http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Feynman_diagram

Un planeta en forma de pera

[Roi03] Ron Roizen, "Christopher Columbus, Magnificent Bungler" Shoshone NewsPress, http://www.roizen.com/ron/Columbus.htm, October 12 2003

[Sac16] Sacred Texts, "The Earth of Columbus" http://www.sacred-texts.com/earth/boe/boe26.htm

[WFl16] la Wikipedia article, "Myth of the Flat Earth" http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Myth_of_the_Flat_Earth

[WGe16] la Wikipedia article, "Geodesy" http://en.la Wikipedia.org/wiki/ History_of_geodesy

[WMa16] la Wikipedia article, "Marinus of Tyre" http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Marinus_of_Tyre

¿Dónde estoy?

[Fer02] J. Donald Fernie, "Finding Out The Longitude" American Scientist, http://www.americanscientist.org/issues/pub/2002/9/finding-out-the-longitude/2, 2002

[WHi16] la Wikipedia article, "History of Longitude" http://en.la Wikipedia.org/wiki/ History_of_longitude

[WJo16] la Wikipedia article, "John Harrison" http://en.la Wikipedia.org/wiki/ John_Harrison

Poniendo a trabajar al multiverso

[Deu97] David Deutsch, The Fabric of Reality, Viking Adult, 1997

[Gar03] Martin Gardner, Are Universes Thicker Than Blackberries, W. W. Norton and Company, 2003

[WMa] la Wikipedia article, "Many Worlds Interpretation" http://en.la Wikipedia.org/ wiki/Many-worlds_interpretation

[WQu] la Wikipedia article, "Quantum Computing" http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Quantum_computing

Capítulo 6: La mente matemática

¿De qué color es este pódcast?

[Sci06] Scientific American, "What Is Synesthesia?'' http://www.scientificamerican.com/ article/what-is-synesthesia/

[WNa16] la Wikipedia article, "Vladimir Nabokov'' http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Vladimir_Nabokov

[WSy16] la Wikipedia article, "Synesthesia" http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Synesthesia

Computadoras en el cerebro

[Max06] Clive Maxfield, "A Reader Responds to 'Seeing Schematics in Color'" EE Times, http://www.eetimes.com/author.asp?section_id=14&doc_id=1282735, September 21 2006

[Max07] Clive Maxfield, "Max's Chips and Dips: Seeing Black-And-White Schematics In Color" Chip Design Magazine, http://chipdesignmag.com/print.php?articleId=1518? issueId=24, August/September 2007

El secreto de Rain Man

[Tam07] Daniel Tammet, Born on a Blue Day, Free Press, 2007

Míralo a los ojos

[Rob08] John Elder Robison, Look Me In The Eye, Three Rivers Press, 2008

[Rob16] John Elder Robison's Website, http://www.johnrobison.com

Los savants también son personas

[Tam09] Daniel Tammet, Embracing the Wide Sky, Atria Books, 2009
[Tam16] Daniel Tammet, “Optimnem Website” http://www.optimnem.co.uk

El cerebro desinhibido

[Tam09] Daniel Tammet, Embracing the Wide Sky, Atria Books, 2009
[Tam16] Daniel Tammet, “Optimnem Website” http://www.optimnem.co.uk

Un lenguaje lógico

[Log16] Loglan official website, http://www.loglan.org
[Loj16] Lojban official website, http://lojban.org
[Nic16] Nick Nicholas and John Cowan, “What Is Lojban?”, http://jbotcan.org/whatislojban/bookl.html
[Nvg16] NVG, “Why I Like Lojban”, NVG Lojban page, http://arj.nvg.org/lojban/why-i-like.html
[Nvg16b] NVG, “Reasons Not To Like Lojban”, NVG Lojban page, http://arj.nvg.org/lojban/anti-lojban.html
[Rat16] Rational wiki, “Lojban”, http://rationalwiki.org/wiki/Lojban
[WEs16] la Wikipedia article, “Esperanto”, http://en.la Wikipedia.org/wiki/Esperanto
[WKl16] la Wikipedia article, “Klingon Language” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Klingon_language
[WLo16] la Wikipedia article, “Loglan” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Loglan

Cuando el “ser” no es

[Bou89] D. David Bourland, “To Be or Not To Be: E-Prime as a Tool for Critical Thinking” ETC: A Review of General Semantics, Vol. 46, No. 3, Fall 1989
[Fre11] James D. French, “The Top Ten Arguments Against E Prime” General Semantics website, http://www.generalsemantics.org/wp-content/uploads/2011/05/ articles/etc/49-2-french.pdf, 2011
[Her16] John C. Herbert, “English Prime as an Instructional Tool in Writing Classes” http://web.archive.org/web/20061007112531/http://exchanges.state.gov/forum/ vols/vol41/no3/p26.htm
[WEp16] la Wikipedia article, “E Prime” http://en.la Wikipedia.org/wiki/E-Prime
[Zim03] Daniel Zimmerman, “E Prime as a Revision Strategy”

http://www.ctlow.ca/E-Prime/zimmerman.html , 2003

Des-abstraer tu vida

[AGS16] Australian General Semantics Society website, http://members.pcug.org.au/~ajames/agsBenefits.htm

[Gar57] Martin Gardner, Fads and Fallacies in the Name ofScience, Dover, 1957

[IGS16] Institute of General Semantics website, http://www.generalsemantics.org

[War12] Ken Ward, "General Semantics" http://www.trans4mind.com/personal_development/KenGenSemantics.htm, 2012

[WGe16] la Wikipedia article, "General Semantics" https://en.la Wikipedia.org/wiki/ General_semantics

Tus hijos son más inteligentes que tú

[Chi14] Tom Chivers, "The Flynn Effect: Are We Really Getting Smarter?" Telegraph, http://www.telegraph.co.uk/news/science/science-news/11200900/The-Flynn- effect-are-we-really-getting-smarter.html, October 31 2014

[Gam12] Megan Gambino, "Are You Smarter Than Your Grandfather?" Smithsonian, http://www.smithsonianmag.com/science-nature/are-you-smarter-than-your- grandfather-probably-not-150402883, December 3 2012

[Gla07] Malcolm Gladwell, "None of the Above" New Yorker, December 17 2007

[Gou96] Stephen Jay Gould, The Mismeasure of Man, W. W. Norton & Company, 1996

[Tra14] Lisa Trahan, Karla K. Stuebing, Merril K. Hiscock, and Jack M. Fletcher, "The

Flynn Effect: A Meta-Analysis" National Institutes of Health, http://www.ncbi.nlm.nih.gov/ pmc/articles/PMC4152423/ , 2014

[WFl16] la Wikipedia article, "Flynn Effect" http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Flynn_effect

Me duele el cerebro

[Hof01] Douglas R. Hofstadter and Daniel C. Dennett, The Mind's I, Basic Books, 2001

Psicrocronometría

[Ken02] James Main Kenney, “Logtime: The Subjective Scale of Life” http://www.kafalas.com/Logtime.html , 2002
[Tam14] Daniel Tammet, Thinking In Numbers, Back Bay Books, 2014
[Tay07] Steve Taylor, “The Speed of Life” New Dawn Magazine, http://www.newdawnmagazine.com/articles/the-speed-of-life-why-time- seems-to-speed-up-and-how-to-slow-it-down, September 1 2007

Capítulo 7: Ciencia y escepticismo

Por qué los estadísticos apestan en estadística

[Tal10] Nassim Nicholas Taleb, The Black Swan, Random House, 2010
[WCo16] la Wikipedia article, “Cognitive Bias” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Cognitive_bias

En promedio, las cosas son promedio

[WRe16] la Wikipedia article, “Regression Towards the Mean”' http://en.la Wikipedia.org/ wiki/Regression_towards_the_mean

No entres en pánico

[Bla09] Michael Blastland and Andrew Dilnot, “The Last Word: When Numbers Deceive” The Week, http://www.theweek.com/articles/508368/last-word-when- numbers-deceive, 2009

Tiene que ser cierto, hay una ecuación

[Sok99] Alan Sokal and Jean Bricmont, Fashionable Nonsense, Picador, 1999
[Tri16] Tripod.com, “Euler’s Proof of God” http://leonhard-euler.tripod.com/id4.html
[WAl16] la Wikipedia article, “Alan Sokal” https://en.la Wikipedia.org/wiki/Alan_Sokal

Una vuelta retorcida sobre Turing

[SCI16] SCIgen official site, https://pdos.csail.mit.edu/archive/scigen/
[WCo16] la Wikipedia article, “Context-Free Grammar” https://en.la Wikipedia.org/wiki/Context-free_grammar
[WSc16] la Wikipedia article, “SCIgen” https://en.la Wikipedia.org/wiki/SCIgen

Quiero mi molécula

[WAv16] la Wikipedia article, “Avogadro’s Number” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Avogadro%27s_number

[WHo16] la Wikipedia article, “Homeopathy” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Homeopathy

La proporción crédula

[Ama16] Amazon.com book page, “The Golden Ratio Lifestyle Diet” http://www.amazon.com/The-Golden-Ratio-Lifestyle-Diet-ebook/dp/B00FO810VQ

[Gar96] Martin Gardner, Weird Water and Fuzzy Logic, Prometheus, 1996

[See16] Nick Seewald, “The Myth of the Golden Ratio” http://goldenratiomyth.weebly.com/phi-in-psychology.html

[Spi16] Mike Spinak, “The Golden Section Hypothesis: A Critical Look” Naturography, http://naturography.com/the-golden-section-hypothesis-a-critical-look/

[WGo16] la Wikipedia article, “Golden Ratio” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Golden_ratio

Jugando con la probabilidad

[Kim16] John Kimball, “The Origin of Life” http://users.rcn.com/jkimball.ma.ultranet/BiologyPages/A/AbioticSynthesis.html

[Olo08] Peter Oloffson, “Probability, Statistics, Evolution, and Intelligent Design” Talk Reason, http://www.talkreason.org/articles/chanceprob.cfm, November 24 2008

[Pau06] John Allen Paulos, “What’s Wrong With Creationist Probability?” ABC News, http://abcnews.go.com/Technology/story?id=2384584&page=1, September 3 2006

[Wat02] Brett Watson, “A Tiny Mathematical Proof Against Evolution” Free Republic, http://www.freerepublic.com/focus/news/640506/posts , 2002

Resolver los problemas de Birmania

[Gur03] Mohan Guruswamy, “A Review of India’s Policy on Burma” Mizzima News, http://burmatoday.net/mizzima2003/mizzima/2003/O6/03O613_india_mizzima.htm, June 13 2003

[WNi16] la Wikipedia article, “9” https://en.la Wikipedia.org/wiki/9_(number)

Una nueva numerología

[WHu16] la Wikipedia article, “Human Genome” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Human_genome

[WNu16] la Wikipedia article, “Numerology” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Numerology

Un gusano intestinal por niño

[Ogd09] Timothy Ogden, “Computer Error?” Pacific Standard, http://www.psmag.com/ business-economics/computer-error-3520, August 20 2009

[WAm16] la Wikipedia article, “Amdahl’s Law” https://en.la Wikipedia.org/wiki/Amdahl%27s_law

[WOn16] la Wikipedia article, “One Laptop Per Child” http://en.la Wikipedia.org/wiki/One_laptop_per_child

Capítulo 8: Analizando las artes

Descubriendo la tercera dimensión

[Aut12] Automotive Illustrations, “Perspective Drawing Basics” http://www.automotiveillustrations.com/tutorials/perspective-drawing-basics.html

[Sup01] Patrick Suppes, “Finitism in Geometry”' http://suppes-corpus.stanford.edu/ articles/ll/386.pdf

[WAg16] la Wikipedia article, “Agatharcus” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Agatharchus

[WEb16] Web Exhibits, Pompeii Image, http://www.webexhibits.org/sciartperspective/i/perspective1_large-01.jpg

[WPe16] la Wikipedia article, “Perspective (graphical)” http://en.la Wikipedia.org/ wiki/Perspective_(graphical)

Una nueva perspectiva sobre la perspectiva

[Gun08] Ben Gunnink, “Technology as Symptom and Dream” http://dreamflesh.com/ library/robert-d-romanyshyn/technology-as-symptom-and-dream/ , 2008

[WMa16] la Wikipedia article, “Marshall McLuhan” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Marshall_McLuhan

La venganza de Hipaso

[Boy16] John Boyd-Brent, “Pythagoras: Music and Space” About Scotland, http://www.aboutscotland.co.uk/harmony/prop.html

[Nov16] Yuval Nov, “Explaining the Equal Temperament” http://www.yuvalnov.org/temperament/

[WEq16] la Wikipedia article, “Twelve Tone Equal Temperament”' http://en.la Wikipedia.org/wiki/Twelve_tone_equal_temperament

Inaudible pero divertid

[Cag04] John Cage, John Cage: Writer, Limelight, 2004

[WJo16] la Wikipedia article, “John Cage” http://en.la Wikipedia.org/wiki/John_Cage

Cómo suena un planeta

[Lou10] Louise, “Carmen of the Spheres” Music and Astronomy, http://musicandastronomy.blogspot.com/2010/02/carmen-of-spheres.html , February 4 2010

[WMu16] la Wikipedia article, “Music of the Spheres” http://en.la Wikipedia.org/ wiki/Music_of_the_spheres

[WOc16] la Wikipedia article, “Octave” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Octave

Mozart tira los dados

[Chu95] John Chuang, “Mozart’s Musikalisches Wurfelspiel” http://sunsite.univie.ac.at/Mozart/dice/ , 1995

[Wag00] Willis Wager, “Composers and Crapshooters”, Carousel Music, http://www.carousel-music.com/shooters.html , 2000

[WMo16] la Wikipedia article, “Musikalisches Wurfelspiel” http://en.la Wikipedia.org/ wiki/Musikalisches_Wurfelspiel

El cálculo de Cándido

[Vol59] Voltaire, Candide, originally published in 1759, full English translation available from Project Gutenberg at http://www.gutenberg.org/files/19942/19942-h/ 19942-h.htm

[WCa16] la Wikipedia article, “Candide” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Candide

[WGo16] la Wikipedia article, “Gottfried Leibniz” http://en.la Wikipedia.org/wiki/

GottfriedLeibniz

Fractales en el sombrero

[Lak93] Ahklesh Lakhtakia, “Fractals and The Cat in the Hat” Penn State News, http://news.psu.edu/story/14O794/1993/O9/01/research/fractals-and-cat-hat , September 1 1993
[Nel07] Philip Nel, The Annotated Cat, Random House, 2007
[Seu58] Dr Seuss, The Cat in the Hat Comes Back, Random House, 1958
[WFr16] la Wikipedia article, “Fractals” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Fractals

¿Matemática o no matemática?

[Hof98] Douglas R. Hofstadter, Le Ton Beau de Marot, Basic Books, 1998

Gnovelas retorcidas

[Ruc13] Rudy Rucker, “What is Gnarl?” Rudy Rucker Blog, http://www.rudyrucker.com/blog/2013/09/06/gnarly-sf-reality-1-what-is-gnarl/, September 6 2013
[Von69] Kurt Vonnegut, Slaughterhouse-Five, Delacorte, 1969
[WKo16] la Wikipedia article, “Kolmogorov Complexity” http://en.la Wikipedia.org/ wiki/Kolmogorov_complexity

Capítulo 9: Reflexiones políticas

Un teorema fundacional

[WMa16] la Wikipedia article, “Marquis de Condorcet” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Marquis_de_Condorcet

Más que un gato de caricatura

[Kle95] Suzanne Klebe, “President Garfield and the Pythagorean Theorem”, American Almanac, http://american_almanac.tripod.com/garfield.htm, February 1995
[WJa16] la Wikipedia article, “James A. Garfield” http://en.la Wikipedia.org/wiki/James_A._Garfield

El camino circular hacia la condena

[Ada91] Cecil Adams, “Did a state legislature once pass a law saying pi equals 3?”

Straight Dope, http://www.straightdope.com/columns/read/805/did-a-state-legislature-once-pass-a-law-saying-pi-equals-3, February 22 1991

[WPi16] la Wikipedia article, “Pi” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Pi

Un profesor de matemáticas para recordar

[Phi08] Tony Phillips, “Solzhenitsyn Mathematician” American Mathematical Society, http://www.ams.org/news/math-in-the-media/mmarc-10-2008-media, October 2008

[WSo16] la Wikipedia article, “Solzhenitsyn” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Solzhenitsyn

Soluciones electorales

[McC12] Amy McCaig, “Hand Counts of Votes May Cause Errors, Says New Rice Study” Rice University, http://news.rice.edu/2012/02/02/hand-counts-of-votes- may-cause-errors-says-new-rice-u-study/, February 2 2012

[Sei11] Charles Seife, Proofiness, Penguin Books, 2011

La democracia no funciona

[Bou13] Don Boudreaux, “The Collective Is Not a Relevant Alternative to the Individual” Cafe Hayek, http://cafehayek.com/2013/11/the-collective-is-not-a- relevant-alternative-to-the-individual.html, November 7 2013

[Tal08] Presh Talwakar, “Arrow’s Impossibility Theorem and the Voting Paradox” Mind Your Decisions, http://mindyourdecisions.com/blog/2008/02/12/game-theory- tuesdays-someone-is-going-to-be-unhappy-an-illustration-of-the-voting- paradox/, February 12 2008

[WAr16] la Wikipedia article, “Arrow’s Impossibility Theorem” http://en.la Wikipedia.org/ wiki/Arrow%27s_impossibility_theorem

Suelta ese número o disparamos

[Loh06] Fred von Lohmann and Wendy Seltzer, “Death by DMCA” IEEE Spectrum, http://spectrum.ieee.org/computing/software/death-by-dmca, June 1 2006

[Tou08] David Touretzky, “Gallery of CSS Descramblers” http://www.cs.cmu.edu/~dst/DeCSS/Gallery/

[WDM16] la Wikipedia article, “DMCA” http://en.la Wikipedia.org/wiki/DMCA

Así lo hacemos en el gobierno

[WMa16] la Wikipedia article, “Margin of Error” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Margin_of_error

Capítulo 10: Cuestiones de dinero

La locura de las muescas

[Bir16] Dave Birch, “Tallies & Technologies” http://www.arraydev.com/commerce/ JIBCZ9811-11.htm
[WTa16] la Wikipedia article, “Tally Stick” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Tally_stick

Cómo arruinar a tu jefe y hacerte rico

[Tal05] Nassim Nicholas Taleb, Fooled By Randomness, Random House, 2005
[Tal16] Nassim Nicholas Taleb’s official website, “Fooled By Randomness” http://www.fooledbyrandomness.com

¿De qué color es tu cisne?

[Tal10] Nassim Nicholas Taleb, The Black Swan, Random House, 2010

Desventaja comparativa

[Lan07] Lauren F. Landsburg, “Comparative Advantage” Library of Economics and Liberty, http://www.econlib.org/library/Topics/Details/ comparativeadvantage.html , 2007
[Tal10] Nassim Nicholas Taleb, The Black Swan, Random House, 2010
[WCo16] la Wikipedia article, “Comparative Advantage” http://en.la Wikipedia.org/ wiki/Comparative_advantage
[WIr16] la Wikipedia article, “Irish Potato Famine” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Irish_potato_famine

Dinero para las matemáticas

[Cla16] The Clay Mathematics Institute official website, http://www.claymath.org
[Kla13] Erica Klarreich, “Unheralded Mathematician Bridges the Prime Gap” Quanta, https://www.quantamagazine.org/20130519-unheralded- mathematician- bridges-the-prime-gap/, May 19 2013

[Sin16] Simon Singh, “The Wolfskehl Prize” http://simonsingh.net/media/articles/maths-and-science/the-wolfskehl-prize/

[WFe16] la Wikipedia article, “Fermat’s Last Theorem” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Fermat’s_Last_Theorem

Gustar de la lotería

[Bay14] Bay News, “10 Things More Likely to Happen Than Winning the Mega Millions Lottery”http://www.baynews9.com/content/news/baynews9/news/article.html/content/news/articles/cfn/2013/12/17/mega_millions_odds.html?cid=rss , December 17 2013

[Han12] Andrew Hanson, “Powerball: Why the Lottery Is Idiotic” http://mic.com/articles/7169/powerball-why-the-lottery-is-idiotic#.Yr0MSiyJX, November 25 2012

[Hic13] Walter Hickey, “According to Math, Here’s When You Should Buy a Powerball Ticket” Business Insider, http://www.businessinsider.com/heres-when-math-says- you-should-start-to-care-about-powerball-2013-9, September 16 2013

[New92] New York Times, “Group Invests $5 Million to Hedge Bets in Lottery” February 25 1992

[Sal07] Alan Salzberg, “The Lottery: A Tax on Stupidity?” http://what-are-the-chances.blogspot.com/2007/12/lottery-tax-on-stupidity.html, December 13 2007

[WEx16] la Wikipedia article, “Lottery: Expected Value” http://en.la Wikipedia.org/ wiki/Lottery#Expected_value

Tonterías numéricas

[Aye16] Nancy Ayers, “Calculators in the Classroom” http://www.math.wichita.edu/ history/topics/calculators.html#calc

[Mat96] Mathematically Correct, “A Horizon Without Calculators” http://www.mathematicallycorrect.com/horizon.htm

¿Siempre gana la casa?

[Mez03] Ben Mezrich, Bringing Down the House, Atria Books, 2003

Ascendiendo Mutadamente por la Escalera Corporativa

[WFr16] la Wikipedia article, “Fractals” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Fractals
[Whe06] Margaret Wheatley, Leadership and the New Science, Berrett-Koehler Publishers, 2006
[Whe16] Margaret Wheatley’s official website, http://margaretwheatley.com

El Converso de un CEO

[WIn16] la Wikipedia article, “In Search of Excellence” http://en.la Wikipedia.org/wiki/In_Search_of_Excellence

Capítulo 11: Mirando la vida

Florence Nightingale, friki de las matemáticas

[Lip93] Sally Lipsey, “Mathematical Education in the Life of Florence Nightingale” https://www.agnesscott.edu/Lriddle/WOMEN/night_educ.htm, 1993
[Neu03] D. Neuhauser, “Florence Nightingale Gets No Respect” National Institutes of Health, http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1743730/pdf/v012p00317.pdf, 2003
[WFl16] la Wikipedia article, “Florence Nightingale” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Florence_Nightingale

El genio que hizo trampa

[Gel12] Andrew Gelman, “Gregor Mendel’s Suspicious Data” http://andrewgelman.com/ 2012/08/08/gregor-mendels-suspicious-data/, August 8 2012
[Pil84] Ira Pilgrim, “The Too-Good-To-Be-True Paradox and Gregor Mendel” The Journal of Heredity, http://irapilgrim.mcn.org/men02.html, 1984
[WGr16] la Wikipedia article, “Gregor Mendel” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Gregor_mendel

El trasero de la lanzadera

[Ada00] Cecil Adams, “Was Standard Railroad Gauge Determined by Roman Chariot Ruts?” Straight Dope, http://www.straightdope.com/columns/read/2538/was- standard-railroad-gauge-48-determined-by-roman-chariot-ruts, February 18 2000
[Sno14] Snopes, “Horse’s Pass”

http://www.snopes.com/history/american/gauge.asp, January 14 2014

Auge y caída

[Bra10] Larry Bradley, “Logistic Equation” http://www.stsci.edu/~lbradley/seminar/logdiffeqn.html

[Dal16] Richard Dallaway, “Chaos in the Pond” http://www.dallaway.com/pondlife/

[Mis16] Missouri Department of Conservation, “Better Rabbit Habitat” http://mdc.mo.gov/your-property/wildlife-your-property/small-game-your-property/better-rabbit-habitat

[WLo16] la Wikipedia article, “Logistic Function” https://en.la Wikipedia.org/wiki/ Logistic_function

Los boids y las abejas líderes

[Fis09] Len Fisher, The Perfect Swarm, Basic Books, 2009

[Rey07] Craig Reynolds, “Boids” http://www.red3d.com/cwr/boids/

[Sch08] Kevin M. Schultz, Kevin M. Passino, and Thomas D. Seeley, “The mechanism of flight guidance in honeybee swarms: subtle guides or streaker bees?” Journal of Experimental Biology, http://jeb.biologists.org/content/jexbio/211/20/ 3287.full.pdf, 2008

[WBo16] la Wikipedia article, “Boids” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Boids

Una nueva clase de década

[WCo16] la Wikipedia article, “Conway’s Game of Life” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Conway%27s_Game_of_Life

[Wol02] Stephen Wolfram, A New Kind ofScience, Wolfram Media, 2002

[Wol12] Stephen Wolfram, “It’s Been Ten Years” http://blog.stephenwolfram.com/2012/05/its-been-10-years-whats-happened-with-a-new-kind-of-science/, May 2012

Bichos básicos

[Bra86] Valentino Braitenburg, Vehicles: Experiments in Synthetic Psychology, Bradford Books, 1986

[WBr16] la Wikipedia article, “Braitenburg Vehicle” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Braitenberg_vehicle

[Wis99] John Wiseman, “Braitenburg Vehicles” http://people.cs.uchicago.edu/~wiseman/vehicles/, May 6 1999

Matemáticas que pican

[Mur16] Murderous Maths, “The Cicada’s 17-Year Life Cycle” http://www.murderousmaths.co.uk/cicadas.htm
[Tab16] Esteban G. Tabak, “Why Do Cicadas Have Prime Life Spans?” http://www.cims.nyu.edu/~eve2/cicadas.pdf

Viajes por el espacio animal

[Daw05] Richard Dawkins, The Ancestor's Tale, Mariner Books, 2005

Un montón de gaviotas

[Daw05] Richard Dawkins, The Ancestor's Tale, Mariner Books, 2005
[Spe08] Jeff Speaks, “The Sorites Paradox” http://www3.nd.edu/~jspeaks/courses/2007-8/93914/_HANDOUTS/sorites.pdf, April 22 2008
[WSo16] la Wikipedia article, “Sorites Paradox” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Sorites_paradox

Capítulo 12: Paradojas desconcertantes

Puedes cruzar la calle

[WAr16] la Wikipedia article, “Archimedes” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Archimedes#Mathematics
[WZe16] la Wikipedia article, “Zeno’s Paradox” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Zeno%27s_paradox

Naves griegas en cuatro dimensiones

[WSh16] la Wikipedia article, “Ship of Theseus” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Ship_of_theseus
[WVe16] la Wikipedia article, “Velvet Underground” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Velvet_underground

Una sorpresa navideña

[Cho98] Timothy Y. Chow, “The Surprise Examination or Unexpected Hanging

Paradox”http://www-math.mit.edu/~tchow/unexpected.pdf, 1998

[Gev04] Uri Geva, “The Surprise Paradox, Is It a Paradox?” MathVentures, http://www.mathventures.com/mathematicool/paradoxes/SurpriseParadox.htm, 2004

[WSu16] la Wikipedia article, “Unexpected Hanging Paradox”' http://en.la Wikipedia.org/ wiki/Unexpected_hanging_paradox

Resolviendo la paradoja del abuelo

[Cha09] Mark Chacksfield, “Large Hadron Collider Sabotaged by Time Travel?” Tech Radar, http://www.techradar.com/news/world-of-tech/future-tech/large-hadron- collider-sabotaged-by-time-travel--642543, October 14 2009

[WGr16] la Wikipedia article, “Grandfather Paradox” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Grandfather_paradox

[WNo16] la Wikipedia article, “Novikov Self-Consistency Principle” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Novikov_self-consistency_principle

[WWo16] la Wikipedia article, “World Line” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ World_line

Una decisión de un millón de dólares

[Kie00] Frank Kiekeben, “Newcomb’s Paradox” http://www.franzkiekeben.com/ newcomb.html , 2000

[WNe16] la Wikipedia article, “Newcomb’s Paradox” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Newcomb%27s_paradox

La paradoja del pintor

[WGa16] la Wikipedia article, “Gabriel’s Horn” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Gabriel%27s_horn

La paradoja de Monty Hall

[WMo16] la Wikipedia article, “Monty Hall Paradox” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ Monty_Hall_Paradox

Una bomba nuclear matemática

[WGo16] la Wikipedia article, “Godel’s Incompleteness Theorems” http://en.la

Wikipedia.org/ wiki/Godel%27s_incompleteness_theorems
[WPr16] la Wikipedia article, “Principia Mathematica” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Principia_Mathematica

Capítulo 13: Repensando la realidad

Respondiendo a todas las preguntas posibles

[Bar16] University of Barcelona, “Who Was Ramon Llull?”, http://quisestlullus.narpan.net/eng/611_info_eng.html#
[Bon16] Anthony Bonner, “What Was Llull Up To?”, http://www.ramonllull.net/sw_studies/studies_original/compbon.html
[Cro05] John N. Crossley, “Raymond Llull’s Contributions to Computer Science” http://www.csse.monash.edu.au/publications/2005/tr-2005-182-full.pdf, 2005
[WRa16] la Wikipedia article, “Ramon Llull” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Ramon_Llull

Sacrificando una cabra al cálculo

[Jon89] David E. H. Jones, “The World of Mathematics (review)” http://www.project2061.org/publications/rsl/online/TRADEBKS/REVS/WORLMATH.HTM, 1989
[WAn16] la Wikipedia article, “The Analyst” http://en.la Wikipedia.org/wiki/The_Analyst
[WGe16] la Wikipedia article, “George Berkeley” https://en.la Wikipedia.org/wiki/ George_Berkeley
[WLi16] la Wikipedia article, “Limits” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Limit_of_a_function

Grue y Bleen

[WGr16] la Wikipedia article, “Grue and Bleen” http://en.la Wikipedia.org/wiki/Grue_and_Bleen

Hipopótamos en mi sótano

[Hod16] Mark Hodes, “Thinking Well and Thinking Logically” http://www.skepticfiles.org/skep2/thinking.htm

¿Hay un hipopótamo en este pódcast?

[Mac93] J. F. MacDonald, "Russell, Wittgenstein and the problem of the rhinoceros" Southern Journal of Philosophy 31 (4), 1993

[Mar10] Andy Martin, "Beyond Understanding" New York Times, http://www.andyross.net/autism.htm, November 21 2010

[Rys07] Simon van Rysewyk, "Wittgenstein: If a lion could speak, we could not understand him" https://wittgensteinforum.wordpress.com/2007/06/13/wittgenstein-if-a-lion-could-speak-we-could-not-understand-him-pi-p223/ , June 13 2007

[WWi16] la Wikipedia article, "Wittgenstein" http://en.la Wikipedia.org/wiki/Wittgenstein

Te he mentido

[Bur09] Ben Burgis, "A Half-Baked Thought About The Lottery Paradox, the Preface Paradox and the Philosophy of Science" http://blogandnot-blog.blogspot.com/2009/06/half-baked-thought-about-lottery.html, June 17 2009

[WLo16] la Wikipedia article, "Lottery Paradox" http://en.la Wikipedia.org/wiki/Lottery_paradox

[WPr16] la Wikipedia article, "Preface Paradox" http://en.la Wikipedia.org/wiki/Preface_paradox

[WRo16] la Wikipedia article, "Rounding Errors" http://en.la Wikipedia.org/wiki/Rounding_error

¿Existe este pódcast?

[Bos03] Nick Bostrom, "Are You Living in a Computer Simulation?" Philosophical Quarterly Vol. 53, No. 211, 2003

[Gay12] Damien Gayle, "Do We Live in the Matrix?" Daily Mail, http://www.dailymail.co.uk/sciencetech/article-2216189/Do-live-Matrix-researchers-say-way-prove-do.html, October 11 2012

[Gra11] Ed Grablanowski, "You're Living in a Computer Simulation, and Math Proves It" IO9, http://io9.gizmodo.com/5799396/youre-living-in-a-computer-simulation- and-math-proves-it, May 7 2011

Un universo hecho de matemáticas

[Fra08] Adam Frank, "Is The Universe Actually Made of Math?" Discover Magazine,

http://discovermagazine.com/2008/jul/16-is-the-universe-actually-made-of-math , June 16 2008

[Hos08] Sabine Hossenfelder, “Discover Interview With Tegmark” Back Reaction, http://backreaction.blogspot.com/2008/06/discover-interview-with-tegmark.html, June 17 2008

Inmortalidad matemática

[WMa16] la Wikipedia article, “Many-Worlds Interpretation”' http://en.la Wikipedia.org/ wiki/Many-worlds_interpretation

[WSi16] la Wikipedia article, “The Singularity” http://en.la Wikipedia.org/wiki/ The_singularity

[1] Imagen utilizada con permiso bajo la licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported; original disponible aquí: https://commons.wikimedia.Org/wiki/File:KochFlake.svg.

[2] Imagen utilizada con permiso bajo la licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported; original disponible aquí: https://commons.wikimedia.Org/wiki/File:Embedded_ pentagrams_(thick,_transparent).png.

[3] Fuente: Wikimedia Commons, en https://commons.wikimedia.Org/wiki/File:Penrose Tiling_(P1).svg.

[4] Imagen utilizada con permiso bajo la licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported; original disponible aquí: https://commons.wikimedia.Org/wiki/File:Embedded_ pentagrams_(thick,_transparent).png.

[5] sell sea shells by the seashore: vender conchas marinas en la orilla del mar.

[6] Respectivamente: Signifier, signified, statement.

[7] Juego de palabras en inglés, pie = tarta, pastel.

[8] Fuente: Wikimedia Commons, en https://commons.m.wikimedia.org/wiki/File:Pompeii_Fresco_001.jpg, dominio público bajo la etiqueta {{PD-Art}}.

[9] Échiquier (galicismo adaptado al inglés como exchequer): En el Ducado de Normandía y posteriormente en el reino de Inglaterra, constituía el equivalente de la Cámara de Cuentas de otros reinos y principados. El nombre proviene de la mesa en torno a la cual se reunía la Cámara de Cuentas. Dicha mesa estaba formada por casillas blancas y negras al modo de un tablero de ajedrez (chequer), sobre las que los contribuyentes iban depositando sus impuestos ante el tribunal.

[10] Fuente: Wikimedia Commons, en https://en.wikipedia.org/wiki/File:GabrielHorn.png . Publicado como dominio público por su propietario, el usuario RokerHRO.

[11] Fuente: Wikimedia Commons, en https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ramon_ Llull_-_Ars_Magna_Tree_and_Fig_1.png , dominio público bajo la etiqueta {{PD-Art}}.